# 2024 年秋数值最优化期中考试

cyber1024

一. 如果 $x^*$ 是 $f$ 的最小值, 证明:

1. $\nabla f(x^*) = 0, \nabla^2 f(x^*) \succeq 0$.
2. 如果 $x^*$ 是严格最小值, 证明 $\nabla^2 f(x^*) \succ 0$.

二. 如果 f 是凸函数. 证明:

1. f 的局部最小点是全局最小点.
2. 如果 f 是严格凸的, 证明 x 是唯一最小点.

三. 投影算子

1. 证明 $P_\Omega(x)$ 良定义.
2. 证明 $(x - P_\Omega(x))(y - P_\Omega(x)) \leqslant 0$.
3. 证明:

$$\|P_\Omega(x) - P_\Omega(y)\|^2 \leqslant \|x - y\|^2 - \|(x - P_\Omega(x)) - (y - P_\Omega(y)\|^2$$

四.$T(x)$ 为一个算子满足

$$\|T(x) - T(y)\|^2 \leqslant \|x - y\|^2 - \|(x - T(x)) - (y - T(y)\|^2$$

设 $Fix(T)$ 非空, 证明对于任意的初值 $x_0$,$x_{k+1} = T(x_k)$ 都收敛于 $Fix(T)$ 中的某一点.

五. 设 $f$ 可微并且

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leqslant L\|x - y\|$$

有下面一个梯度法的迭代序列.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k)$$

证明存在常数 $C$, 使得

$$f(x_k) - f(x^*) \leqslant \frac{C}{k}$$