微积分 I (第一层次)期中试卷 (2020.11.21)

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x}=1$.

2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right)=0$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}\sin x, & x>0, \\ x, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

4. 设 $0<x_1<1$, 且 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n\,(n\geqslant 1)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限并求该极限.

5. 求由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}=\ln 2$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数.

6. 求曲线 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\sin 2t \\ y=\mathrm{e}^t\cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线和法线方程.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

8. 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\left(\arctan\dfrac{2020}{n-1}-\arctan\dfrac{2020}{n+1}\right)$ 是不为零的常数, 求 α 以及该极限值.

二、(10分）确定以下函数的间断点，并说明是哪种类型的间断点.

$$f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, & x\text{ 为有理数}, \\ 0, & x\text{ 为无理数}. \end{cases}$$

三、(12分）当 $x\to 0$ 时，求 $1-\cos(\sin x)+a\ln(1+x^2)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

四、(10分）设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$, $f(2)=1$, 计算 $f'''(2)$.

五、(10分）设 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, 求 $f(x)$ 的各阶导函数.

六、(10分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $f(0)=0$, $|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$. 证明：在 $[0,1]$ 上，$f(x)\equiv 0$.

微积分 I（第一层次）期中试卷 (2021.11.20)

一、简答题（每题 6 分，共 48 分）

1. 用定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=4.$

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos x}.$

3. 以 x 为基准无穷小，当 $x\to 0$ 时，求 $5^x-1-\ln(1+x\ln 5)$ 的无穷小主部.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan x+\mathrm{e}^y+xy=0$ 给出，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$

5. 设 $x_1\in\mathbb{R}$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sin x_n$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n.$

6. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定，求 $t=1$ 对应点处的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}.$

7. 设 $y=(x^2+3x+1)\mathrm{e}^{-x}$，求 $y^{(99)}.$

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+a_3^x+a_4^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a_i>0,\ i=1,2,3,4.$

二、(10分) 求函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|\tan(x+2)}{x^2+x-2}$ 的间断点，并说明间断点的类型.

三、(10分) 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x>0, \\ 1+x^2, & x\leqslant 0, \end{cases}$

(1) 讨论 $f(x)$ 的连续性； (2) 求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

四、(8分) 设 $y=f\left(\dfrac{2x-1}{1-3x}\right)\mathrm{e}^{f(x)}$, $f'(x)=\sin x+x$, 且 $f(0)=1$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}.$

五、(8 分) 当 $x>0$ 时，证明不等式：$0<\mathrm{e}^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}<x(\mathrm{e}^x-1).$

六、(8分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M$ 且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值.

证明：$|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant M.$

七、(8分) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}=\mathrm{e}.$

微积分 I (第一层次)期中试卷 (2022.11.12)

一、证明下列各题（每题 6 分，共 12 分）

1. 用函数极限的定义 ($\varepsilon-\delta$ 语言) 证明 $\lim\limits_{x\to 1}(x+2\sqrt{x})=3$.

2. 用数列极限定义 ($\varepsilon-N$ 语言) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n^3q^n=0$, $(|q|<1,\ q\neq 0)$.

二、计算下列各题（每题 6 分，共 36 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{2}{x}\right)^x$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}$.

3. 设 $x\geqslant 0$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{4}\right)^n}$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $f''(0)=1$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5. 求 $y=\dfrac{5}{x^2-x-6}$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}$.

6. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

三、(8分) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x\arctan\frac{1}{x-1}}{\sin\frac{\pi x}{2}}$ 的连续性，并判断其间断点的类型.

四、(8分) 设函数 $f(x)=\tan x-\sin x+\mathrm{e}^x+ax^2+bx+c$, 满足 $f(x)=o(x^2)$, 求 a,b,c, 并求 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

五、(10分) 设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n+6}{x_n+2}$, $n=1,2,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

六、(6分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(f(x))=x$ 有实根，求证 $f(x)=x$ 亦有实根.

七、(10分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)=0$, $f(2)=2$. 证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $f(\xi)=2-\xi$;

(2) 存在 $\eta,\zeta\in(0,2)$, $(\eta\neq\zeta)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

八、(10分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(a\ln(1+x)+b\cos x-b), & x<0, \\ 1+\sin x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 试求：

(1) a,b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？

(2) 在 (1) 成立的前提下，复合函数 $F(x)=f(f(x))$ 在 $x=0$ 处是否可导？若可导，求出其在 $x=0$ 处的导数值.

微积分 I (第一层次)期中试卷参考答案 2020.11.21

一、1. (略);

2. 解：当n为偶数时，

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{n}.$$

当n为奇数时，

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}.$$

由夹逼准则即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}\right)=0.$

3. $f'(x)=\begin{cases}x^{2x}\left(2(1+\ln x)\sin x+\cos x\right), & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0,\end{cases}.$

4. 首先由归纳法可得$0<x_n<1$, 又由于$x_{n+1}-x_n=x_n(1-x_n)>0$, 因此数列x_n单调递增有上界，故收敛. 设极限是A，则$A^2=A$，由$\{x_n\}$ 单调递增可知$A=1$.

5. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}\,(x\neq y)$.　　6. 切线方程为$y=\frac{1}{2}x+1$, 法线方程为$y=-2x+1$.

7. $-\frac{1}{2}$.　　8. $\alpha=2$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{2020}{n-1}-\arctan\frac{2020}{n+1}\right)=4040$.

二、当$x_0\neq k\,(k\in\mathbb{Z})$时，函数在$x=x_0$处间断，且为第二类间断点.

三、$a\neq-\frac{1}{2}$时无穷小主部为$\left(\frac{1}{2}+a\right)x^2$;　$a=-\frac{1}{2}$时无穷小主部为$\frac{1}{24}x^4$.　　四、$f'''(2)=2e^3$.

五、$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$; $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)\quad(n\geqslant 2)$.

六、证明：若在$[0,1]$上，$f(x)$不恒为零，设$|f(x)|$ 在$x_0\in(0,1]$ 处达到最大值. 由中值定理，存在$\xi\in(0,x_0)\subset(0,1]$, 使得$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}$. 从而$|f'(\xi)|=\frac{|f(x_0)|}{x_0}\geqslant|f(x_0)|>\frac{1}{2}|f(x_0)|\geqslant\frac{1}{2}|f(\xi)|$, 与题目条件矛盾.

微积分 I（第一层次）期中试卷参考答案 (2021.11.20)

一、1. 不妨设$|x-2|<\frac{1}{2}$, 则 $\left|\frac{x+2}{x-1}-4\right|=\frac{3|x-2|}{|x-1|}<6|x-2|$,

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{6},\frac{1}{2}\right\}$, 使得 $0<|x-2|<\delta$ 时, 总有$\left|\frac{x+2}{x-1}-4\right|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2}{x-1}=4$.

2. -1.　　3. 所以无穷小主部为$(\ln 5)^2x^2$.　　4. $y'=-\frac{\frac{1}{1+x^2}+y}{x+\mathrm{e}^y}$.　　5. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

6. 在$t=1$处，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{2}$.　　7. $y^{(99)}=\mathrm{e}^{-x}(-x^2+195x-9406)$.　　8. $\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$.

二、解：函数在定义域$\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 1, x\neq -2, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-2, k\in\mathbb{Z}\}$ 上都是连续的; $x=1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点; $x=-2$ 是第一类间断点中的可去间断点; $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}-2, k\in\mathbb{Z}$ 都是第二类间断点.

三、(1) $f(x)$ 是定义域 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. (2) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 2x, & x<0\end{cases}$ 且 $f'(x)$ 连续.

四、$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=(\sin 1+1)\,\mathrm{e}.$ 五、(略)

六、证：由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，得 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在且连续. 由 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值，得存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$. 对 $f'(x)$ 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理知：

$$f'(\xi)-f'(0)=f''(\eta_1)(\xi-0),\ \eta_1\in(0,\xi),\ \ f'(1)-f'(\xi)=f''(\eta_2)(1-\xi),\ \eta_2\in(\xi,1),$$

$$\begin{aligned}|f'(0)|+|f'(1)|&=|f'(\xi)-f'(0)|+|f'(1)-f'(\xi)|=|f''(\eta_1)(\xi-0)|+|f''(\eta_2)(1-\xi)|\\&=|f''(\eta_1)|\xi+|f''(\eta_2)|(1-\xi)|\leqslant M.\end{aligned}$$

七、法一: 数列单增, 有上界 (讲基本极限 e 时证过数列小于 3), 则极限存在.

固定 n, 则对任意的 $m>n$, $(1+\dfrac{1}{m})^m\geqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{m})\cdots(1-\frac{k-1}{m})$;

由极限保号性, 令$m\to\infty$, $\mathrm{e}\geqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, 则数列单增有上界进而收敛，且$\mathrm{e}\geqslant\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$;

另一方面, $(1+\dfrac{1}{n})^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$; 令 $n\to\infty$, $\mathrm{e}\leqslant\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$;

所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}.$

法二: 由带拉格朗日余项的泰勒公式, 有 $\mathrm{e}^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$

则令 $x=1$ 有 $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\mathrm{e}\right|\leqslant\dfrac{\mathrm{e}}{(n+1)!}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$. 由 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{n+1}=0$, 则 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}.$

微积分 I (第一层次)期中试卷参考答案 (2022.11.12)

一、1. (略)； 2. 证明：记 $a=\dfrac{1}{|q|}>1$. $\forall\varepsilon>0$, 注意到

$$|n^3q^n|=\frac{n^3}{a^n}=\frac{n^3a^3}{(1+a-1)^{n+3}}<\frac{n^3a^3}{C_{n+3}^4(a-1)^4}<\frac{4!a^3}{(a-1)^4}\frac{1}{n}$$

取 $N=\left[\dfrac{4!a^3}{(a-1)^4\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有 $|n^3q^n|<\varepsilon$, 所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^3q^n=0.$

二、 1. e. 2. $\dfrac{3}{2}$. 3. 记 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{4}\right)^n}$, 则 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x<4,\\ \dfrac{x^2}{4}, & x\geqslant 4.\end{cases}$

4. $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. 5. $y^{(n)}=-\dfrac{n!}{(3-x)^{n+1}}-(-1)^n\dfrac{n!}{(x+2)^{n+1}}$. 6. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\cos t(\cot t-t)$.

三、$x=0,x=1,x=2k(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为间断点, x为其它实数时 $f(x)$ 连续.

$x=0$ 为可去间断点, $x=1$ 为跳跃间断点, $x=2k$ 为第二类间断点(无穷间断点).

四、$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-1$, $c=-1$. $f(x)$ 关于 x 的无穷小阶数为3，无穷小主部为 $\dfrac{2x^3}{3}$.

五、$|x_{n+1}-2|<\dfrac{1}{3^n}|x_1-2|$, 即 $|x_{n+1}-2|\to 0(n\to\infty)$, 说明数列 x_n 收敛，且极限为2.

六、提示：对函数 $F(x)=f(x)-x$ 在区间 $[x_1,f(x_1)]$ 上连续用零点定理即可.

七、提示：(1) 对函数 $\phi(x)=f(x)+x-2$ 在 $[0,2]$ 上用零点定理;

(2) 对函数 $f(x)$ 分别在区间 $[0,\xi]$ 以及 $[\xi,2]$ 上使用拉格朗日中值定理.

八、(1) $a=1,b=-3$. (2) $f(f(x))$ 在 $x=0$ 处可导，且$F'(0)=\cos 1$.