微积分 I 期末试卷 2019.12.30

一、求下列不定积分(6分× 3=18分)

1. $I_1=\int\sqrt{1+3\cos^2 x}\cdot\sin(2x)\mathrm{d}x$.　2. $I_2=\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$.　3. $I_3=\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

二、计算下列各题 (6分× 3=18分)

1. 求定积分 $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

2. 求由 $y^2=-4(x-1)$ 与 $y^2=-2(x-2)$ 所围平面图形的面积.

3. 求心脏线 $\rho=a(1-\sin\theta)\ (a>0)$ 的全长 s.

三、计算下列各题 (6分× 3=18分)

1. 求广义积分 $I_5=\int_0^{+\infty}\frac{1-x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

2. 已知三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2, |\boldsymbol{b}|=3, |\boldsymbol{c}|=4$, 且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

3. 设有两条直线 $L_1:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$, $L_2:\frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-2}$, 证明它们是异面直线.

四、(10分) 设 $f(x)$ 是连续函数，又 $g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A\ (A$ 为常数)，求 $g'(x)$, 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

五、(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}}{n}$.

六、(10分) 讨论函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出图像.

七、(10分) 求一条直线 L, 使得 L 过点 $P(2,3,4)$, 且与平面 $\Pi: 2x+y-2z+7=0$ 平行，又与直线 $L_1:\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-5}{-1}$ 相交.

八、(6分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

微积分 I 期末试卷 2021.1.4

一、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{5}{n^2}+\cos\frac{5}{n}\right)^{3n^2}$.　2. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x-1)}}$.　3. 求函数 $y=(x+3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

二、计算下列各题 (6分× 3=18分)

1. $I_1=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x$.　2. $I_2=\int\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.　3. $I_3=\int_{-1}^1\frac{x^4+x^7\cos^{10}x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

三、计算下列各题 (6分× 2=12分)

1. 已知三个单位向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

2. 将直线的一般式方程 $\begin{cases} x-y+z+5=0, \\ 5x-8y+4z+36=0 \end{cases}$ 化为点向式方程.

四、(10 分) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\sin x)^{\sin x}-x^{\sin x}}{\sin^2 x\arcsin x}$.

五、(10分) 设 $f(x)$ 在 R 上可导且 $f(0)=0, f'(x)\geq 0$. 证明 $\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2\leq 2\displaystyle\int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t$.

六、(10分) 求由曲线 $y=\ln x$ 在 $(\mathrm{e},1)$ 处的切线与 $y=\ln x$ 以及 x 轴所围成的平面图形 D 的面积 S,

D 分别绕 x 轴、y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_x, V_y.

七、(14分) 讨论函数 $y=x\arctan x$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出函数图像.

八、(8 分) 已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$.

求证：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{6}(b-a)^3f''(\xi)$.

微积分 I 期末试卷 2022.1.4

一. 计算下列各题 (6 分 $\times 3=18$ 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.　　2. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

3. 设$f(x)$ 在 a 的一个邻域内二阶连续可导，$f'(a)=\sqrt{2}, f''(a)=2$, 求

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(x)}\right).$$

二、计算下列各题 (6 分 $\times 3=18$ 分)

1. 计算积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x$;　　2. 计算积分 $\displaystyle\int x^2(\ln x)^2\mathrm{d}x$.　　3. 计算积分 $\displaystyle\int_0^1\ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$.

三、计算下列各题 (6 分 $\times 3=18$ 分)

1. 求与直线 L_1: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ 及 L_2: $\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ 都平行且与它们等距的平面方程.

2. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.　　3. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 所围图形面积 S.

四、(6分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)>0$，求方程 $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在 (a,b) 内根的个数.

五、(12分) 讨论函数 $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点，渐近线，并作出草图。

六、(10分) 1. 证明 $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$. 2. 计算 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

七、(10分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二次可微, 并且 $f''(x)>0$. 设 L_t 为曲线 $C: y=f(x)$ 在点 $(t,f(t))$ 的切线, $A(t)$ 为曲线 C 与直线 $L_t, x=a, x=b$ 所围图形的面积. 问 $A(t)$ 在哪些点取到最小值? 说明你的理由.

八、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有三阶连续导数,

证明: 极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)\right|$ 存在.

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案2019.12.30

一、 1. $I_1=-\dfrac{2}{9}(1+3\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}+C$; 2. $I_2=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$;

3. $$I_3=-\int\frac{x}{\cos x}\mathrm{d}\frac{1}{x\sin x+\cos x}=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{x\sin x+\cos x}\mathrm{d}\frac{x}{\cos x}$$
$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$$

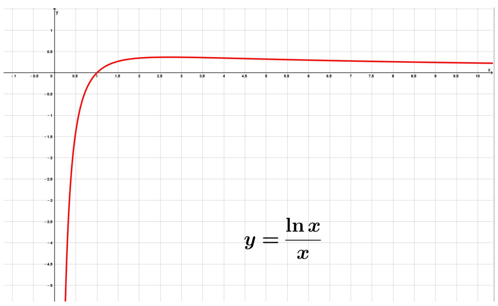
二、 1. $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$; 2. $\dfrac{8}{3}$; 3. $8a$. 三、 1. 0; 2. $-\dfrac{29}{2}$.

四、 $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ $g'(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x\neq 0,\\ \frac{A}{2}, & x=0.\end{cases}$

$g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

五、原式 $=\exp\left(\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}\right)=\exp\left(\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x\right)=\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

六、 定义域 $(0,+\infty)$; 单调增区间 $(0,\mathrm{e})$, 单调减区间 $(\mathrm{e},+\infty)$; 极大值 $f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 下凹区间 $(0,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}})$, 上凹区间 $(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty)$; 拐点 $\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$; $x=0$ 是铅直渐近线; $y=0$ 是水平渐近线.



七、 $\dfrac{x-2}{15}=\dfrac{y-3}{-14}=\dfrac{z-4}{8}$.

八、 证明：令 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F'(x)=f(x)$, $F''(x)=f'(x)$, $F'''(x)=f''(x)$, 且 $F(a)=0$.

$F(x)$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处的2阶泰勒公式为

$$F(x)=F\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{2}f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2+\frac{1}{6}f''(\xi_1)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^3 \tag{1}$$

其中 ξ 在 x 与 $\dfrac{a+b}{2}$ 之间. 在 (1) 中分别令 $x=a$ 和 $x=b$, 得

$$0=F\Big(\frac{a+b}{2}\Big)-f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\frac{(b-a)^2}{4}-\frac{1}{6}f''(\xi_2)\frac{(b-a)^3}{8},\quad a<\xi_2<\frac{a+b}{2} \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{1}{6}f''(\xi_3)\frac{(b-a)^3}{8},\quad \frac{a+b}{2}<\xi_3<b \tag{3}$$

(3) − (2) 得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{48}\Big(f''(\xi_2)+f''(\xi_3)\Big)$$

由 $f''(x)$ 的连续性可知 $f''(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_3]$ 上有最大值 M 和最小值 m, 再由介值定理，$\exists\xi\in[\xi_2,\xi_3]\subset(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=\dfrac{1}{2}(f''(\xi_2)+f''(\xi_3))$, 所以 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi)$.

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案 2021.1.4

一、 1. $\mathrm{e}^{-\frac{45}{2}}$; 2. e; 3. $x=0$ 是铅直渐近线，$y=x+4$ 是斜渐近线.

二、 1. $I_1=\dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x|+C$. 2. $I_2=\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$; 3. $I_3=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{3}$.

三、 1. $-\dfrac{3}{2}$. 2. $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$.

四、 $-\dfrac{1}{6}$

五、设 $F(x)=\Big(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\Big)^2-2\int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t$, 则

$$F'(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)-2xf^2(x)=2f(x)\cdot x\cdot f(\xi)-2xf^2(x)=2xf(x)(f(\xi)-f(x)),$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间. 因为 $f'(x)\ge 0$, 所以 $f(x)$ 单调增加.

当 $x>0$ 时，$f(x)\ge f(\xi)\ge f(0)=0$, 故 $F'(x)\le 0, F(x)$ 单调减少, 因此 $F(x)\le F(0)=0$;

当 $x<0$ 时，$f(x)\le f(\xi)\le f(0)=0$, 故 $F'(x)\ge 0, F(x)$ 单调增加, 因此 $F(x)\le F(0)=0$;

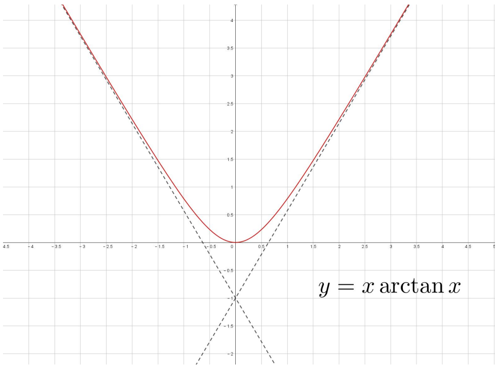
综上所述，$F(x)\le 0$, 即 $\Big(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\Big)^2\le 2\int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t$.

六、$S=\displaystyle\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\mathrm{d}y=\Big(\mathrm{e}^y-\frac{\mathrm{e}y^2}{2}\Big)\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1$.

$$V_x = \frac{1}{3}\pi \mathrm{e} - \pi \int_1^{\mathrm{e}} \ln^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\pi \mathrm{e} - \pi(x\ln^2 x - 2x(\ln x - 1))\Big|_1^{\mathrm{e}} = 2\pi(1 - \frac{\mathrm{e}}{3}).$$

$$V_y = \pi \int_0^1 (\mathrm{e}^{2y} - \mathrm{e}^2 y^2)\mathrm{d}y = \pi\big(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^2 y^3\big)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}(\mathrm{e}^2 - 3).$$

七、定义域 $(-\infty, +\infty)$; 偶函数;
$y' = \arctan x + \dfrac{x}{1+x^2}$,
单调增区间 $(0, +\infty)$, 单调减区间 $(-\infty, 0)$;
极小值 $y(0)=0$;
$y'' = \dfrac{2}{(1+x^2)^2} > 0$, 上凹区间$(-\infty, +\infty)$;　无拐点;
渐近线 $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1, y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$.



八、令 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F'(x) = f(x), F''(x) = f'(x), F'''(x) = f''(x)$, 且 $F(a) = 0, F''(a) = F''(b) = 0$.

函数 $F(x)$ 在 $x = a$ 处的2阶泰勒公式为

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}F''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}F'''(\xi_1)(x-a)^3 \\ &= f(a)(x-a) + \frac{1}{6}f''(\xi_1)(x-a)^3 \end{aligned}$$

其中 $a < \xi_1 < x$. 令 $x = b$, 得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(a)(b-a) + \frac{1}{6}f''(\xi_2)(b-a)^3$, $(a < \xi_2 < b)$,　(1)

函数 $F(x)$ 在 $x = b$ 处的2阶泰勒公式为

$$\begin{aligned} F(x) &= F(b) + F'(b)(x-b) + \frac{1}{2!}F''(b)(x-b)^2 + \frac{1}{3!}F'''(\eta_1)(x-b)^3 \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + f(b)(x-b) + \frac{1}{6}f''(\eta_1)(x-b)^3 \end{aligned}$$

其中 $x < \eta_1 < b$. 令 $x = a$, 得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(b)(b-a) + \frac{1}{6}f''(\eta_2)(b-a)^3$, $(a < \eta_2 < b)$,　(2)

(1)+(2)得　$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(f(a) + f(b)\Big)(b-a) + \frac{1}{6}\Big(\frac{f''(\xi_2) + f''(\eta_2)}{2}\Big)(b-a)^3$,

因为 $f''(x)$ 在区间 $[\xi_2, \eta_2]$ (或 $[\eta_2, \xi_2]$) 上连续，由最值定理，$f''(x)$ 在区间 $[\xi_2, \eta_2]$ (或 $[\eta_2, \xi_2]$) 上有最大值 M 与最小值 m, 而$m \le \dfrac{f''(\xi_2) + f''(\eta_2)}{2} \le M$, 则由介值定理，$\exists \xi \in [\xi_2, \eta_2] \subset (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = \dfrac{f''(\xi_2) + f''(\eta_2)}{2}$, 于是 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(f(a) + f(b)\Big)(b-a) + \frac{1}{6}f''(\xi)(b-a)^3$.

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案 2022.1.4

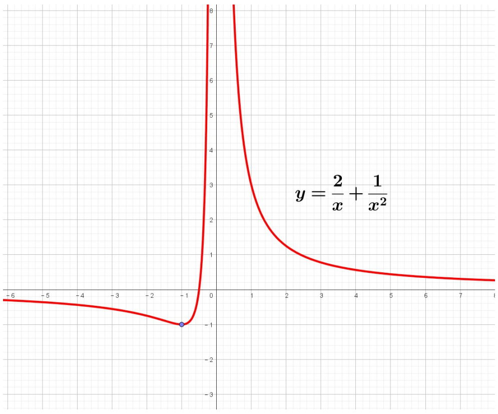
一、1. $e^{-1/2}$.　　2. $(-1)^n\dfrac{n!}{6}(\dfrac{1}{(x-4)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+2)^{(n+1)}})$.　　3. $\dfrac{1}{2}$.

二、1. $\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$;　2. $\dfrac{1}{3}x^3\ln^2 x-\dfrac{2}{9}x^3\ln x+\dfrac{2}{27}x^3+C$.　3. $\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1$.

三、 1. $5x+2y+z+1=0$.　2. $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.　3. $\dfrac{3}{2}\pi a^2$.

四、方程$\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在(a,b)内有并且只有一个根.

五、 定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;
单调增区间$(-1,0)$, 单调减区间$(-\infty,-1),(0,+\infty)$;
极小值$f(-1)=-1$, 没有极大值;
下凹区间$(-\infty,-\dfrac{3}{2})$, 上凹区间$(-\dfrac{3}{2},0),(0,+\infty)$;
拐点$\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{8}{9}\right)$;
$x=0$是铅直渐近线，$y=0$是水平渐近线.



六、 2. $\dfrac{\pi^2}{4}$.

七、 $f''(x)>0$,曲线C是凹的,

$$A(t)=\int_a^b(f(x)-f(t)-f'(t)(x-t))\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(t)-\frac{b^2-a^2}{2}f'(t)+(b-a)tf'(t).$$

$A'(t)=f''(t)(b-a)(t-\dfrac{a+b}{2})$. 令$A'(t)=0$, 得$t=\dfrac{a+b}{2}$.

当$a<x<\dfrac{a+b}{2}$时, $A'(t)<0$, 当$\dfrac{a+b}{2}<x<b$时, $A'(t)>0$,

所以$A(t)$在$t=\dfrac{a+b}{2}$取到最小值.

八、证明：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(\zeta)}{6}x^3.$$

$$|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)|=|k(\frac{2f'(0)}{k}+\frac{f^{(3)}(\alpha_k)}{6k^3}+\frac{f^{(3)}(\beta_k)}{6k^3})-2f'(0)|\le\frac{M}{3k^2},$$

其中 $M=\max\limits_{-1\le x\le1}|f^{(3)}(x)|$.

设$x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)|$, 显然$x_n$是单调增加数列，又

$$x_n\le\sum_{k=1}^n\frac{M}{3k^2}<\frac{M}{3}\Big(1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})\Big)<M.$$

x_n 是单调有界数列，因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)|$ 存在.