微积分 I (第一层次)期中试卷 (2019.11.16)

一、计算下列各题（每题 6 分，共 48 分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\sin^3 x}=1$.

2. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1$.

3. 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}}\sin x+(\arctan x)^{\tan x}$ 的一阶导数和微分。

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$， 其中 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可微性.

6. 设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7. 设 $f(x)=x\ln(1+x)+\cos x+ax^2+bx+c=o(x^2)$, 求 a, b, c 的值. 若以 x 为基准无穷小，求 $f(x)$ 关于 x 的无穷小阶数和无穷小主部。

8. 设函数 $y(x)$ 由如下参数方程定义: $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\operatorname{arccot} t+\ln(1+t^2).\end{cases}$ 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

二、(10分) 确定函数 $f(x)$ 的间断点，并说明是哪种类型的间断点。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}, & x\neq 0, x\neq 1,\\ 0, & x=0,\\ \sin 1, & x=1.\end{cases}$$

三、(10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且导函数 $f'(x)$ 严格单调递增. 若 $f(a)=f(b)$, 证明对一切 $x\in(a,b)$, 有 $f(x)<f(a)=f(b)$.

四、(10分) 求由方程 $\mathrm{e}^{x+y}-xy-\mathrm{e}=0$ 确定的曲线在点 $(0,1)$ 处的切线和法线方程。

五、(12分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\neq 0$, 又 $f(a)=1$, $f(b)=0$, 证明

(1) 存在 $\xi_1\in(a,b)$, 使得 $f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$;

(2) 存在 ξ_2, $\xi_3\in(a,b)$ $(\xi_2\neq\xi_3)$, 使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\dfrac{4}{f'(\xi_3)}=5(a-b)$.

六、(10分) 设 $f(x)=|x|^n g(x)$, 其中 n 为奇数，$g(x)$ 有 n 阶导数. 在什么条件下 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有 n 阶导数？

微积分 I (第一层次)期中试卷(2020.11.21)

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x}=1$.

2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right)=0$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}\sin x, & x>0, \\ x, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

4. 设 $0<x_1<1$, 且 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n\,(n\geqslant 1)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限并求该极限.

5. 求由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}=\ln 2$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数.

6. 求曲线 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\sin 2t \\ y=\mathrm{e}^t\cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线和法线方程.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

8. 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}\left(\arctan\dfrac{2020}{n-1}-\arctan\dfrac{2020}{n+1}\right)$ 是不为零的常数, 求 α 以及该极限值.

二、(10分）确定以下函数的间断点，并说明是哪种类型的间断点.

$$f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, & x\text{ 为有理数}, \\ 0, & x\text{ 为无理数}. \end{cases}$$

三、(12分）当 $x\to 0$ 时，求 $1-\cos(\sin x)+a\ln(1+x^2)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

四、(10分）设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$, $f(2)=1$, 计算 $f'''(2)$.

五、(10分）设 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, 求 $f(x)$ 的各阶导函数.

六、(10分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $f(0)=0$, $|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$. 证明：在 $[0,1]$ 上，$f(x)\equiv 0$.

微积分 I（第一层次）期中试卷 2021.11.20

一、简答题（每题 6 分，共 48 分）

1. 用定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=4$.

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos x}$.

3. 以 x 为基准无穷小，当 $x\to 0$ 时，求 $5^x-1-\ln(1+x\ln 5)$ 的无穷小主部.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan x+\mathrm{e}^y+xy=0$ 给出，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

5. 设 $x_1\in\mathbb{R}$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sin x_n$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定，求 $t=1$ 对应点处的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

7. 设 $y=(x^2+3x+1)\mathrm{e}^{-x}$，求 $y^{(99)}$.

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+a_3^x+a_4^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a_i>0,\ i=1,2,3,4$.

二、（10分）求函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|\tan(x+2)}{x^2+x-2}$ 的间断点，并说明间断点的类型.

三、（10分）设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x>0, \\ 1+x^2, & x\leqslant 0, \end{cases}$

(1) 讨论 $f(x)$ 的连续性; (2) 求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

四、（8分）设 $y=f\left(\dfrac{2x-1}{1-3x}\right)\mathrm{e}^{f(x)}$, $f'(x)=\sin x+x$, 且 $f(0)=1$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

五、（8分）当 $x>0$ 时，证明不等式：$0<\mathrm{e}^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}<x(\mathrm{e}^x-1)$.

六、（8分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M$ 且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值.

证明：$|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant M$.

七、（8分）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}=\mathrm{e}$.

微积分 I（第一层次）期中试卷参考答案 19.11.16

一、 1. $\forall\varepsilon>0$, 由$|\sqrt{1-\sin^3x}-1|=\dfrac{|\sin^3x|}{1+\sqrt{1-\sin^3x}}\leqslant|x|^3<\varepsilon$, 取 $\delta=\varepsilon^{1/3}$, 当 $0<|x-0|<\delta$ 时有 $|\sqrt{1-\sin^3x}-1|<\varepsilon$.

2. $\forall\varepsilon>0$, 由$\left|\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}-1\right|=\dfrac{|\sqrt{1+n^2}-n|}{\sqrt{1+n^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}(n+\sqrt{1+n^2})}\leqslant\dfrac{1}{n}$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}-1\right|<\varepsilon$.

3. 令 $y_1=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}\sin x}$, $y_2=(\arctan x)^{\tan x}$, 则 $y'=y_1'+y_2', \mathrm{d}y=(y'+y')\mathrm{d}x$, 其中

$$y_1'=y_1(\ln y_1)'=\frac{y_1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}+\frac{\cos x}{\sin x}\right),$$

$$y_2'=y_2(\ln y_2)'=y_2\left(\sec^2x\ln\arctan x+\frac{\tan x}{(1+x^2)\arctan x}\right).$$

4. 当$ab=0$时，易见原式为0. 当$ab\neq0$时，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1\right)\right)^{\frac{1}{\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1}n\cdot\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1\right)}\\&=\exp\left(\frac12\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/n}-1}{1/n}+\frac{b^{1/n}-1}{1/n}\right)\right)=\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

5. $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x}=0,\quad f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x}=1.$ 则 $f_-'(0)\neq f_+'(0)$, 故 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导，从而不可微.

6. 首先由归纳法可有 $x_n>0$, 又由于 $0<x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$,故数列 x_n 单调递减有下界，故收敛，设极限是 A，则 $\ln(1+A)=A$，从而有$A=0$.

7. 由 $f(x)=o(x^2)$ 可得 (1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, 即 $1+c=0$, 从而 $c=-1$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)+\cos x+ax^2+bx-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\ln(1+x)+\dfrac{\cos x-1}{x}+ax+b\right)=b=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$,即

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+\cos x+ax^2-1}{x^2}\overset{\frac00}{=}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}-\sin x+2ax}{2x}\overset{\frac00}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x+2a}{2}=\frac12+a=0\Longrightarrow a=-\frac12.$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^k}&=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+\cos x-\frac12x^2-1}{x^k}\overset{\frac00}{=}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}-\sin x-x}{kx^{k-1}}\\&\overset{\frac00}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x-1}{k(k-1)x^{k-2}}\overset{\frac00}{=}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{2}{(1+x)^3}+\sin x}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}\end{aligned}$$

从而取 $k=3$, 得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=-\dfrac{1}{2}$. 则 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 的无穷小阶数为3, 无穷小主部为 $-\dfrac{1}{2}x^3$.

8. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-\frac{1}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t-1,\quad \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(2t-1)'}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=2(1+t^2).$

二、函数在$x\neq 0, x\neq 1$ 的地方显然连续；由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}\frac{1-x}{x}x\sin\frac{1}{x}=-\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x},$$

不存在，所以 $x=0$ 是第二类间断点，且为振荡间断点.

由于 $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=\sin 1,\qquad \lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=0$, 所以 $x=1$ 是第一类间断点，且为跳跃间断点.

三、任给 $x\in(a,b)$, 由中值定理，存在$\xi_1\in(a,x)$, $\xi_2\in(x,b)$，$\xi_1<\xi_2$且

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

可推出$f(x)<f(a)$.

四、切线方程为$y=\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}x+1$, 法线方程为$y=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}x+1$.

五、**证明：** (1) 由于$f(x)$在$[a,b]$可导，从而在$[a,b]$连续。又$f(b)=0<\dfrac{4}{5}<1=f(a)$, 由介值定理，存在 $\xi_1\in(a,b)$, 使得 $f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$.

(2) 由Lagrange中值定理，分别考虑区间$[a,\xi_1]$, $[\xi_1,b]$, 可得

$$f(\xi_1)-f(a)=f'(\xi_2)(\xi_1-a),\qquad f(b)-f(\xi_1)=f'(\xi_3)(b-\xi_1)$$

注意到$f(a)=1, f(b)=0, f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$, $f'(x)\neq 0$, 整理可得

$$-\frac{1}{5}\frac{1}{f'(\xi_2)}=\xi_1-a,\qquad -\frac{4}{5}\frac{1}{f'(\xi_3)}=b-\xi_1$$

两式相加得证。

六、解: 由莱布尼兹公式可直接求出$f(x)$在$x\neq 0$处的 k $(0<k\leqslant n-1)$ 阶导数为

$$f^{(k)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}g(x)\mathrm{sgn}(x)+\sum_{i=0}^{k-1}F_{n-i}(x)g^{(k-i)}(x)\mathrm{sgn}(x)$$

其中 $F_{n-i}(x)$ 为 x 的 $n-i$ 次单项式。由导数的定义可有对任意 $0<k\leqslant n-1$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 k 阶导数为零. 则 $f^{(n-1)}(x)$ 当 $g(0)=0$ 时可导，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 n 阶可导.

微积分 I (第一层次)期中试卷参考答案 2020.11.21

一、1. 不妨设 $|x-1|<1$, 即 $0<x<2$. $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{1,\varepsilon\}$,

当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $\left|\sqrt[3]{x}-1\right|=\dfrac{|x-1|}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}<|x-1|<\varepsilon.$

2. 解：当n为偶数时，

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{n}.$$

当n为奇数时，

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}.$$

由夹逼准则即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right)=0.$

3. $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{2x}\sin x}{x}=1,\qquad f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1,$

所以 $f'(x)=\begin{cases}x^{2x}\left(2(1+\ln x)\sin x+\cos x\right), & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0,\end{cases}.$

4. 首先由归纳法可得$0<x_n<1$, 又由于$x_{n+1}-x_n=x_n(1-x_n)>0$, 因此数列x_n单调递增有上界，故收敛. 设极限是A，则$A^2=A$，由$\{x_n\}$ 单调递增可知$A=1$.

5. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{x-y}\,(x\neq y).\qquad$ 6. 切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$, 法线方程为 $y=-2x+1$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

8.
$$\arctan\frac{2020}{n-1}-\arctan\frac{2020}{n+1}=\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{2020}{n-1}-\frac{2020}{n+1}\right)\sim\frac{4040}{n^2},\quad \text{其中}\xi\in\left(\frac{2020}{n+1},\frac{2020}{n-1}\right),$$

故 $\alpha=2$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{2020}{n-1}-\arctan\dfrac{2020}{n+1}\right)=4040.$

二、当 $x_0=k\,(k\in\mathbb{Z})$ 时，$f(x_0)=0$, f 连续.

当 $x_0\neq k\,(k\in\mathbb{Z})$ 时，取有理数序列 $\{x_{n,1}\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n,1}=x_0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n,1})=\sin\pi x_0$; 取无理数序列 $\{x_{n,2}\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n,2}=x_0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n,2})=0$. 故函数在 $x=x_0$ 处不连续，且为第二类间断点.

三、解：当$a\neq-\dfrac{1}{2}$时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)+a\ln(1+x^2)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)\cos x+\frac{2ax}{1+x^2}}{2x}=\dfrac{1}{2}+a\neq 0.$

当$a=-\dfrac{1}{2}$时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)\cos x-\frac{x}{1+x^2}}{4x^3}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)\cos^2 x-\sin(\sin x)\sin x+\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}}{12x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}-\frac{1}{12}+\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)\cos^3 x-\cos(\sin x)\sin 2x+\frac{6x-2x^3}{(1+x^2)^3}}{24x}=\frac{1}{24}.$$

因此，$a \neq -\frac{1}{2}$时无穷小主部为$\left(\frac{1}{2}+a\right)x^2$； $a=-\frac{1}{2}$时无穷小主部为$\frac{1}{24}x^4$.

四、$f'''(2)=2e^3$.

五、$f(x)=x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$, $f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$;

$n>1$时，$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$.

六、证明：若在$[0,1]$上，$f(x)$不恒为零，设$|f(x)|$ 在$x_0\in(0,1]$ 处达到最大值. 由中值定理，存在$\xi\in(0,x_0)\subset(0,1]$, 使得$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}$. 从而

$$|f'(\xi)|=\frac{|f(x_0)|}{x_0}\geqslant|f(x_0)|>\frac{1}{2}|f(x_0)|\geqslant\frac{1}{2}|f(\xi)|.$$

与题目条件矛盾.

微积分 I（第一层次）期中试卷参考答案 2021.11.20

一、1. 不妨设$|x-2|<\frac{1}{2}$, 则 $\left|\frac{x+2}{x-1}-4\right|=\frac{3|x-2|}{|x-1|}<6|x-2|$,

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{6},\frac{1}{2}\}$, 使得 $0<|x-2|<\delta$ 时, 总有$\left|\frac{x+2}{x-1}-4\right|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2}{x-1}=4$.

2. $x\to0$时，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=-1$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{5^x-1-\ln(1+x\ln5)}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5^x\ln5-\frac{\ln5}{1+x\ln5}}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5^x\ln^25+\frac{\ln^25}{(1+x\ln5)^2}}{k(k-1)x^{k-2}}=\ln^25,\ (k=2)$,

所以无穷小主部为$(\ln5)^2x^2$.

4. 把y看成x的函数，方程 $\arctan x+\mathrm{e}^y+xy=0$ 两边对x求导，得 $\frac{1}{1+x^2}+\mathrm{e}^yy'+y+xy'=0$, 所以$y'=-\frac{\frac{1}{1+x^2}+y}{x+\mathrm{e}^y}$.

5. 解：法一：$x_2=\frac{1}{2}\sin x_1\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, 由 $\begin{cases}0\leqslant\sin t\leqslant t, & t\in[0,1/2],\\ t\leqslant\sin t\leqslant0, & t\in[-1/2,0]\end{cases}$ 知，

当 $x_2=\frac{1}{2}\sin x_1\in[0,\frac{1}{2}]$ 时，$0\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant x_2$, 此时数列单调下降，有下界 0，收敛；

当 $x_2=\frac{1}{2}\sin x_1\in[-\frac{1}{2},0]$ 时，$0\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant x_2$, 此时数列单调上升，有上界 0，收敛.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sin x_n$ 得极限 $A=\frac{1}{2}\sin A$, 从而极限为 0.

法二：$0\leqslant|x_n|=\frac{1}{2}|\sin x_{n-1}|\leqslant\frac{1}{2}|x_{n-1}|=\frac{1}{2^2}|\sin x_{n-2}|\leqslant\frac{1}{2^2}|x_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}|x_1|$,

$\lim\limits_{n\to\infty}0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_1|=0$, 由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

6. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2t}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{-1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}$. 所以在$t=1$处，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{2}$.

7. 由莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned} y^{(99)} &= (\mathrm{e}^{-x})^{(99)}(x^2+3x+1) + C_{99}^1(\mathrm{e}^{-x})^{(98)}(x^2+3x+1)' + C_{99}^2(\mathrm{e}^{-x})^{(97)}(x^2+3x+1)'' \\ &= (-1)^{99}\mathrm{e}^{-x}(x^2+3x+1) + 99\cdot(-1)^{98}\mathrm{e}^{-x}(2x+3) + \frac{99\cdot 98}{2}(-1)^{97}\mathrm{e}^{-x}\cdot 2 \\ &= \mathrm{e}^{-x}(-x^2+195x-9406). \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\Big(\frac{a_1^x+a_2^x+a_3^x+a_4^x}{4}\Big)^{\frac{1}{x}} = \exp\Big(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+a_3^x+a_4^x)-\ln 4}{x}\Big) \\ =&\exp\Big(\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+a_3^x\ln a_3+a_4^x\ln a_4}{a_1^x+a_2^x+a_3^x+a_4^x}\Big) = \exp\Big(\frac{\ln a_1+\ln a_2+\ln a_3+\ln a_4}{4}\Big) \\ =&\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}. \end{aligned}$$

二、解：函数在定义域$\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 1, x\neq -2, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-2, k\in\mathbb{Z}\}$ 上都是连续的;

在 $x=1$ 处, $\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{\tan(x+2)}{x+2}=\frac{\tan 3}{3}$, $\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}-\frac{\tan(x+2)}{x+2}=-\frac{\tan 3}{3}$,
所以 $x=1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点;

在 $x=-2$ 处, $\displaystyle\lim_{x\to -2}f(x)=\lim_{x\to -2}-\frac{\tan(x+2)}{x+2}=-1$,
所以 $x=-2$ 是第一类间断点中的可去间断点;

在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}-2, k\in\mathbb{Z}$ 处, $\displaystyle\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}-2}f(x)=\infty$,

所以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}-2, k\in\mathbb{Z}$ 都是第二类间断点中的无穷间断点.

三、解：(1) 由初等函数的连续性，$f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处均连续;

在 $x=0$ 处, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+x^2)=1$,
所以 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=1=f(0)$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处也连续; 进而 $f(x)$ 是定义域 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(2) 当 $x>0$ 时, $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)=2x$.

$\displaystyle f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{2x}=0$, $\displaystyle f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+x^2-1}{x}=0$,
所以 $f'(0)=0$.

或者按单侧导数极限理论，
$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x\sin x}{2x}=0=f'_+(0)$,
$\displaystyle\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}2x=0=f'_-(0)$, 所以 $f'(0)=0$.

因此$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 2x, & x<0\end{cases}$ 且 $f'(x)$ 连续.

四、解：由 $f'(x)=\sin x+x$ 可得 $f'(-1)=-\sin 1-1, f'(0)=0$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left[f'\Big(\frac{2x-1}{1-3x}\Big)\cdot\frac{2(1-3x)+3(2x-1)}{(1-3x)^2}\mathrm{e}^{f(x)}+f\Big(\frac{2x-1}{1-3x}\Big)\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)\right]_{x=0}$$

$$=f'(-1)\cdot(-1)\cdot\mathrm{e}^{f(0)}+f(-1)\cdot\mathrm{e}^{f(0)}\cdot f'(0)=(\sin 1+1)\,\mathrm{e}.$$

五、证明：令 $f(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$，则 $f'(x)=e^x-1-x$, $f''(x)=e^x-1$.

由 $f''(x)=e^x-1>0$ 知 $f'(x)$ 单调上升，从而 $f'(x)=e^x-1-x>f'(0)=0$.

进而 $f(x)$ 单调上升，$f(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}>f(0)=0$.

令 $g(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-x(e^x-1)$，则 $g'(x)=e^x-1-x-(e^x-1)-xe^x=-x-xe^x<0$,

从而 $g(x)$ 严格单调下降，$g(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-x(e^x-1)<g(0)=0$.

六、证：由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，得 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在且连续.

由 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值，得存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

对 $f'(x)$ 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理知：

$f'(\xi)-f'(0)=f''(\eta_1)(\xi-0),\ \eta_1\in(0,\xi)$ $\qquad f'(1)-f'(\xi)=f''(\eta_2)(1-\xi),\ \eta_2\in(\xi,1)$

所以

$$\begin{aligned}|f'(0)|+|f'(1)|&=|f'(\xi)-f'(0)|+|f'(1)-f'(\xi)|=|f''(\eta_1)(\xi-0)|+|f''(\eta_2)(1-\xi)|\\&=|f''(\eta_1)|\xi+|f''(\eta_2)|(1-\xi)|\leqslant M.\end{aligned}$$

七、法一: 数列单增, 有上界 (讲基本极限e时证过数列小于3), 则极限存在.

固定n, 则对任意的$m>n$, $\quad (1+\dfrac{1}{m})^m\geqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{m})\cdots(1-\frac{k-1}{m})$;

由极限保号性, 令$m\to\infty$, $\mathrm{e}\geqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, 则数列单增有上界进而收敛，且$\mathrm{e}\geqslant\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$;

另一方面, $(1+\dfrac{1}{n})^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$; 令$n\to\infty$, $\mathrm{e}\leqslant\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$;

所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}.$

法二: 由带拉格朗日余项的泰勒公式, 有 $\mathrm{e}^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$

则令 $x=1$ 有 $\displaystyle\Big|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\mathrm{e}\Big|\leqslant\frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}\leqslant\frac{\mathrm{e}}{n+1}.$ 由 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{n+1}=0$, 则 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}.$