微积分 I（第一层次）期中试卷 (2017.11.18)

一、用极限定义证明下列极限：(6分×2 = 12 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{2n-5}=0.$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}.$

二、计算下列极限：(6分×3 = 18 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\pi-2\arctan x)$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}.$

三、(10分) 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin ax}-1, & x\geq 0 \\ b\ln(1+x), & x<0 \end{cases}$, 其中参数 a,b 都不为0. 如果 $f''(0)$ 存在，求 a,b.

四、(10分) 当 $x\to 0$ 时，以 x 为基准无穷小，求 $(\cos x-1)\ln(1+x)$ 的无穷小主部.

五、(10分) 求方程 $x^3+y^3-3axy=0$ $(a>0)$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 的二阶导数 y''.

六、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=1$, 证明：$\exists\,\eta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\eta)}{\eta}$.

七、(10分) 求参数方程 $\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=1+\sin\theta \end{cases}$ $(0\leq\theta<\pi)$ 所确定的曲线在 $x=2$ 处的切线和法线方程.

八、(10分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f'(x)=-xf(x)$, $f(0)=1$, 证明：对任意的正整数 k,

$$\lim_{x\to+\infty}x^k f(x)=0.$$

九、(10分) 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 其中 a,b,c,d 为常数且 $a\neq 0$. 证明方程 $f(x)=0$ 有三个不相等的实数根的必要条件是 $b^2-3ac>0$.

微积分 I（第一层次）期中试卷 (2018.11.17)

一、简答题：(5分×8 = 40 分)

1. 用极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$.
2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}$.
3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}$.
4. 设 $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, 求 $\mathrm{d}y$.
5. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} n\Big((1+\dfrac{1}{n})^n-e\Big)$.
6. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}$.
7. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\Big((1+\ln(1+x))^{2x}-1\Big)$.
8. 设 x 为基准无穷小，求 $\ln(1+x)-\arctan x$ 的主部.

二、(7分) 设 $f(x)=\dfrac{5x-1}{2x^2+x-1}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

三、(7分) 证明方程 $\cos x-\dfrac{1}{x}=0$ 有无穷多个正根.

四、(7分) 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+e^t=5a \end{cases}$ 所确定(其中 a 为常数)，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

五、(8分) 设 $f(x)=\arctan x-\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$, 其中 $x>-1$.

(1) 证明：$f(x)$ 是常数函数；　(2) 求 $\arctan(2-\sqrt{3})$ 的值.

六、(8分) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+\ln(1+x^2), & x>0; \\ ax\sin x, & x\le 0, \end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导. 试求 a 的值以及 $f''(0)$.

七、(8分) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}$, 试确定 $f(x)$ 的间断点及其类型.

八、(8分) (1) 对任意的正整数 n, 证明 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$;

(2) 令 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 极限存在.

九、(7分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，$f(0)=1, f(1)+2f(2)=3$. 试证明：$\exists\xi\in(0,2)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

微积分 I (第一层次)期中试卷 (2019.11.16)

一、计算下列各题（每题 6 分，共 48 分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\sin^3 x}=1$.

2. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1$.

3. 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}\sin x}+(\arctan x)^{\tan x}$ 的一阶导数和微分。

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$，其中 $a\geq 0, b\geq 0$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可微性.

6. 设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7. 设 $f(x)=x\ln(1+x)+\cos x+ax^2+bx+c=o(x^2)$, 求 a, b, c 的值. 若以 x 为基准无穷小，求 $f(x)$ 关于 x 的无穷小阶数和无穷小主部。

8. 设函数 $y(x)$ 由如下参数方程定义: $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\operatorname{arccot} t+\ln(1+t^2).\end{cases}$ 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

二、(10分）确定函数 $f(x)$ 的间断点，并说明是哪种类型的间断点。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}, & x\neq 0, x\neq 1,\\ 0, & x=0,\\ \sin 1, & x=1.\end{cases}$$

三、(10分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且导函数 $f'(x)$ 严格单调递增. 若 $f(a)=f(b)$，证明对一切 $x\in(a,b)$, 有 $f(x)<f(a)=f(b)$.

四、(10分) 求由方程 $e^{x+y}-xy-e=0$ 确定的曲线在点 $(0,1)$ 处的切线和法线方程。

五、(12分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\neq 0$, 又 $f(a)=1$, $f(b)=0$, 证明

(1) 存在 $\xi_1\in(a,b)$, 使得 $f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$;

(2) 存在 $\xi_2, \xi_3\in(a,b)$ $(\xi_2\neq\xi_3)$, 使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\dfrac{4}{f'(\xi_3)}=5(a-b)$.

六、(10分) 设 $f(x)=|x|^n g(x)$, 其中 n 为奇数，$g(x)$ 有 n 阶导数. 在什么条件下 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有 n 阶导数？