微积分 I（第一层次）期中试卷(16.11.12)

一、用极限定义证明下列极限：(6分×2 = 12 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2+1}=0.$　　　2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}=2.$

二、(8分) 讨论函数 $f(x)=|x(x^2-1)|\sin x$ 的可导性.

三、(8分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(0)=f'(0)=1$. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$.

四、计算下列各题：(8分×5 = 40分)

1. 已知函数 $y=y(x)$ 由 $e^y-e^{-x}+xy=0$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程.
2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right)$.
3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.
4. 设 $y=\ln(\sin x)+x^{x^a}+\dfrac{5^{3x}}{2^x}$, 求 y' 以及 $\mathrm{d}y$.
5. 设 $f(x)=\ln\left(e^{\sin 2x}(x-1)\right)$, 求 $f^{(n)}(x)$.

五、(12分) 已知 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$,

1. 证明：$\dfrac{k}{n+k}<\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)<\dfrac{k}{n}$, 其中 k 为正整数.
2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

六、(12分) 设 $f(x)=x-(ax+b\sin x)\cos x$, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^5}$ 存在且不为零, 求常数 a,b 及此极限值.

七、(8分) 设 $f(x)$ 是以 1 为周期的连续函数，a 是一个实数，试证明存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

微积分 I（第一层次）期中试卷(17.11.18)

一、用极限定义证明下列极限：(6分×2 = 12 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{2n-5}=0.$　　　2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}.$

二、计算下列极限：(6分×3 = 18 分)

1. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$;　　2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\arctan x)$;　　3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$.

三、(10分) 设 $f(x)=\begin{cases}e^{\sin ax}-1, & x\ge0\\ b\ln(1+x), & x<0\end{cases}$, 其中参数 a,b 都不为0. 如果 $f''(0)$ 存在，求 a,b.

四、(10分) 当 $x\to0$ 时，以 x 为基准无穷小，求 $(\cos x-1)\ln(1+x)$ 的无穷小主部.

五、(10分) 求方程 $x^3+y^3-3axy=0\ (a>0)$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 的二阶导数 y''.

六、(10分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=1$, 证明：$\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\eta)}{\eta}$.

七、(10分) 求参数方程 $\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=1+\sin\theta \end{cases}$ $(0\le\theta<\pi)$ 所确定的曲线在 $x=2$ 处的切线和法线方程.

八、(10分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f'(x)=-xf(x)$, $f(0)=1$, 证明：对任意的正整数 k,

$$\lim_{x\to+\infty} x^k f(x)=0.$$

九、(10分) 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 其中 a,b,c,d 为常数且 $a\neq 0$. 证明方程 $f(x)=0$ 有三个不相等的实数根的必要条件是 $b^2-3ac>0$.

微积分 I（第一层次）期中试卷(18.11.17)

一、简答题：(5分×8 = 40 分)

1. 用极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to2}\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$.
2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}$.
3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}$.
4. 设 $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, 求 $\mathrm{d}y$.
5. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} n\Big((1+\dfrac{1}{n})^n-e\Big)$.
6. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}$.
7. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\Big((1+\ln(1+x))^{2x}-1\Big)$.
8. 设 x 为基准无穷小，求 $\ln(1+x)-\arctan x$ 的主部.

二、(7分) 设 $f(x)=\dfrac{5x-1}{2x^2+x-1}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

三、(7分) 证明方程 $\cos x-\dfrac{1}{x}=0$ 有无穷多个正根.

四、(7分) 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+e^t=5a \end{cases}$ 所确定(其中 a 为常数)，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

五、(8分) 设 $f(x)=\arctan x-\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$, 其中 $x>-1$.

(1) 证明：$f(x)$ 是常数函数；　(2) 求 $\arctan(2-\sqrt{3})$ 的值.

六、(8分) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+\ln(1+x^2), & x>0; \\ ax\sin x, & x\le 0, \end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导. 试求 a 的值以及 $f''(0)$.

七、(8分) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$, 试确定 $f(x)$ 的间断点及其类型.

八、(8分) (1) 对任意的正整数 n, 证明 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$;

(2) 令 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 极限存在.

九、(7分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，$f(0)=1, f(1)+2f(2)=3$. 试证明：$\exists\xi\in(0,2)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

微积分I（第一层次）期中试卷参考答案16.11.12

一、 证明：1. $\left|\dfrac{2n+1}{n^2+1}-0\right|=\dfrac{2n+1}{n^2+1}<\dfrac{4n}{n^2}=\dfrac{4}{n}$,

$\forall\varepsilon>0$, 取$N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]+1$, 则当$n>N$ 时，总有$\left|\dfrac{2n+1}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$.

2. $\left|\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}-2\right|=|\sqrt{x}-1|=\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}+1}\le|x-1|$ （设$0<|x-1|<1$）

$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\min\{1,\varepsilon\}$, 则当$0<|x-1|<\delta$时，总有$\left|\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}-2\right|<\varepsilon$.

二、 解：$f(x)=\begin{cases} x(x^2-1)\sin x, & x\ge 1 \text{ 或 } -1<x\le 0; \\ x(1-x^2)\sin x, & 0<x<1 \text{ 或 } x\le -1. \end{cases}$

显然$f(x)$在$(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$内可导；

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x(x^2-1)\sin x}{x-1}=2\sin 1;$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x(1-x^2)\sin x}{x-1}=-2\sin 1;$

同理， $f'_+(-1)=-2\sin 1$, $f'_-(-1)=2\sin 1$; $f'_+(0)=0$, $f'_-(0)=0$;

$f'_+(1)\ne f'_-(1)$, $f'_+(-1)\ne f'_-(-1)$, $f'_+(0)=f'_-(0)=0$, 故$f(x)$在$x=\pm1$处不可导，在$x=0$处可导；

综上，$f(x)$在$x=\pm1$处不可导，在其他点可导。

三、原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x-0}\cdot\dfrac{\sin x}{\ln(1+f(x)-1)}=f'(0)\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-0}{f(x)-f(0)}=\dfrac{1}{f'(0)}=1.$

四、1. 解：把y看成x的函数，方程$e^y-e^{-x}+xy=0$两边对x求导得$e^yy'+e^{-x}+y+xy'=0$, 即$y'=\dfrac{-y-e^{-x}}{e^y+x}$, $x=0$时$y=0$, 代入上式得$y'(0)=-1$, 所以切线方程为$y=-x$.

2. 解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

3. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\frac{x}{2}(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot\frac{x}{2}(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}.$

4. 解：$y'=\dfrac{\cos x}{\sin x}+x^{x^a}(x^a\ln x)'+\dfrac{3\cdot5^{3x}\ln5\cdot2^x-5^{3x}\cdot2^x\ln2}{2^{2x}}=\cot x+x^{x^a}x^{a-1}(a\ln x+1)+\dfrac{5^{3x}(3\ln5-\ln2)}{2^x};$

$\mathrm{d}y=\left(\cot x+x^{x^a}x^{a-1}(a\ln x+1)+\dfrac{5^{3x}(3\ln5-\ln2)}{2^x}\right)\mathrm{d}x.$

5. 解：$f(x)=\sin2x+\ln(x-1)$, $f'(x)=2\cos2x+\dfrac{1}{x-1}$, $f^{(n)}(x)=2^n\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x-1)^n}.$

五、 1. 证明：设$f(x)=\ln(1+x)$, 则$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, 当$x>0$时，由拉格朗日中指定理 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$, 即$\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$ $(0<\xi<x)$, 而$\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$, 所以$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, $(x>0)$. 取$x=\dfrac{k}{n}$即得$\dfrac{k}{n+k}<\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)<\dfrac{k}{n}$.

2. $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)=\exp\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)\right)$

所以 $a_n<\exp\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)<\exp\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)$;

$$a_n>\exp\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)>\exp\left(\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}\right);$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left(\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}\right)=e^{\frac12}$, 由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^{\frac12}$.

六、解： $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$,代入 $f(x)$ 的表达式得

$f(x)=x-\left(ax+bx-\frac{bx^3}{3!}+\frac{bx^5}{5!}+o(x^5)\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)=(1-a-b)x+\left(\frac{a}{2}+\frac{2b}{3}\right)x^3-\left(\frac{a}{24}+\frac{2b}{15}\right)x^5+o(x^5)$,

所以 $1-a-b=0,\frac{a}{2}+\frac{2b}{3}=0$, 解得$a=4,b=-3$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^5}=-\left(\frac{a}{24}+\frac{2b}{15}\right)=\frac{7}{30}$.

七、证明：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以在 $[0,1]$ 上有最大值和最小值。设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为$f(c_1)=M$，最小值为 $f(c_2)=m$, 则由周期性可知，M和m分别是$f(x)$的最大值和最小值，即 $f(c_2)\le f(x)\le f(c_1),\forall x\in(-\infty,+\infty)$. 设 $F(x)=f(x+a)-f(x)$, 则$F(x)$在 $[0,1]$ 上连续，且$F(c_1)=f(c_1+a)-f(c_1)\le 0$, $F(c_2)=f(c_2+a)-f(c_2)\ge0$, 由零点定理，存在$\xi\in[0,1]$, 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

微积分I（第一层次）期中试卷参考答案17.11.18

一、 证明：1. $\left|\frac{\sqrt{n}+1}{2n-5}-0\right|=\frac{\sqrt{n}+1}{2n-5}<\frac{2\sqrt{n}}{n}=\frac{2}{\sqrt{n}}\ (n>5)$, $\forall\varepsilon>0$, 要使$\left|\frac{\sqrt{n}+1}{2n-5}-0\right|<\varepsilon$, 只需要$\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$, 即 $n>\frac{4}{\varepsilon^2}$, 取$N=\max\{\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]+1,5\}$, 则当$n>N$ 时，总有$\left|\frac{2n+1}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$.

2. $\left|\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{|x-1|}{2(x+1)}\le|x-1|$ （设$0<|x-1|<1$）

$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{1,\varepsilon\right\}$, 则当$0<|x-1|<\delta$时，总有$\left|\frac{x^2-x-1}{x^2-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$.

二、 1. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}}=e$;

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\arctan x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arctan x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac00}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{1+x^2}=2$;

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-x^2\sin\frac1x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-x^2\sin\frac1x}{x}=2-\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac1x=2$.

三、解：$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\sin ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin ax}{x}=a$;

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{b\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{bx}{x}=b$; 所以 $a=b$；

$$f'(x)=\begin{cases}a\cos(ax)e^{\sin ax}, & x>0;\\ a, & x=0;\\ \frac{a}{1+x}; & x<0.\end{cases}$$

$f''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{a\cos axe^{\sin ax}-a}{x}\overset{\frac00}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-a^2\sin(ax)e^{\sin ax}+a^2\cos^2(ax)e^{\sin ax}}{1}=a^2$;

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{a}{1+x}-a}{x}\overset{\frac00}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-b}{(1+x)^2}=-a$; 所以 $a^2=-a$, 解得 $a=b=-1$.

四、解： $(\cos x-1)\ln(1+x)\sim -\dfrac{x^2}{2}\cdot x=-\dfrac{x^3}{2}$, 所以无穷小主部是 $-\dfrac{x^3}{2}$.

五、解：把 y 看作 x 的函数，方程两边对 x 求导得 $3x^2+3y^2\cdot y'-3ay-3ax\cdot y'=0$ (1), 可得 $y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$.
(1) 式化简得 $x^2+y^2y'-ay-axy'=0$, 两边继续对 x 求导得 $2x+2y(y')^2+y^2y''-2ay'-axy''=0$,

解得 $y''=\dfrac{2ay'-2y(y')^2-2x}{y^2-ax}=\dfrac{2a(ay-x^2)(y^2-ax)-2y(ay-x^2)^2-2x(y^2-ax)^2}{(y^2-ax)^3}$.

六、 证明：设 $F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1=F(0)$, 故 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$F(0)=F(1)=1$, 由洛尔定理可得, $\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $F'(\eta)=\dfrac{\eta f'(\eta)-f(\eta)}{\eta^2}=0$, 即 $f'(\eta)=\dfrac{f(\eta)}{\eta}$.

七、解：$x=2$ 时 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, $y=1+\dfrac{\sqrt3}{2}$. 切线的斜率$k=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\left.\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\left.\dfrac{\cos\theta}{-4\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{\sqrt3}{12}$,

切线方程为 $y=\left(1+\dfrac{\sqrt3}{2}\right)-\dfrac{\sqrt3}{12}(x-2)$, 法线方程为 $y=\left(1+\dfrac{\sqrt3}{2}\right)+4\sqrt3(x-2)$.

八、证明：设 $F(x)=e^{\frac{x^2}{2}}f(x)$, 则 $F'(x)=xe^{\frac{x^2}{2}}f(x)+e^{\frac{x^2}{2}}f'(x)=e^{\frac{x^2}{2}}(f'(x)+xf(x))=0$, 故 $F(x)=C=F(0)=1$, 即 $e^{\frac{x^2}{2}}f(x)=1$, 所以 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^kf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^{\frac{x^2}{2}}}=0$.

九、证明：方程 $f(x)=0$ 有三个不相等的实数根，设为 x_1,x_2,x_3, 不妨设 $x_1<x_2<x_3$.
$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，$f(x_1)=f(x_2)=0$, 由洛尔定理，$\exists\xi_1\in(x_1,x_2)$, 使得 $f'(\xi_1)=0$; 同理，$\exists\xi_2\in(x_2,x_3)$, 使得 $f'(\xi_2)=0$; 即 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 有两个不相等的实数根，故 $\Delta=4b^2-12ac>0$, 即 $b^2-3ac>0$.

微积分I（第一层次）期中试卷参考答案18.11.17

一、 1. 证明：$\left|\sqrt{x^2-1}-\sqrt3\right|=\dfrac{|(x-2)(x+2)|}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt3}\le5|x-2|$ (设$0<|x-2|<1$)

$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$, 则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，总有 $\left|\sqrt{x^2-1}-\sqrt3\right|<\varepsilon$.

2. 解：$4\le\sqrt[n]{n^4+4^n}\le\sqrt[n]{n^4\cdot4^n}=4(\sqrt[n]{n})^4$, $\lim\limits_{n\to\infty}4=\lim\limits_{n\to\infty}4(\sqrt[n]{n})^4=4$, 由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}=4$.

3. $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^4=\mathrm{e}^4$.

4. $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left((1+\dfrac{1}{x})^x-\mathrm{e}\right)\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-1\right]}{t}=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$,
所以原式 $=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}.$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\Big((1+\ln(1+x))^{2x}-1\Big)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x\ln(1+\ln(1+x))}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\ln(1+\ln(1+x))}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln(1+x)}{x}=2.$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\arctan x}{cx^k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x^2}}{ckx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x-1)}{(1+x)(1+x^2)ckx^{k-1}}\underline{\underline{k=2}}-\dfrac{1}{2c}=1,$

所以 $k=2, c=-\dfrac{1}{2}$, 无穷小主部为 $-\dfrac{x^2}{2}$.

二、$f(x)=\dfrac{5x-1}{(x+1)(2x-1)}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$, 所以 $f^n(x)=(-1)^n n!\Big(\dfrac{2}{(1+x)^{n+1}}+\dfrac{1}{2(x-\frac{1}{2})^{n+1}}\Big).$

三、证明：令 $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{x}$, $n\in N^*$, $f(2n\pi)=1-\dfrac{1}{2n\pi}>0$, $f((2n+1)\pi)=-1-\dfrac{1}{(2n+1)\pi}<0$, 由零点定理可知，存在 $\xi\in(2n\pi,(2n+1)\pi)$, 使得 $f(\xi)=0$. n 取所有正整数，所以 $f(x)=0$ 有无穷多个正根.

四、 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}.$

五、(1) $f'(x)\equiv0$, 所以 $f(x)$ 是常值函数 $(x>-1)$. 令 $x=1$ 得 $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$, 所以 $\arctan x-\arctan\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{\pi}{4}.$

(2) 由 (1) 知 $\arctan(2-\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{4}+\arctan\dfrac{2-\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}+1}=\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi}{12}.$

六、解 $f'(x)=\begin{cases}2x+\frac{2x}{1+x^2}, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ a\sin x+ax\cos x, & x<0,\end{cases}$

$f''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x+\frac{2x}{1+x^2}}{x}=4;$

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{a\sin x+ax\cos x}{x}=2a;$

所以 $a=2$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$f''(0)=4$.

七、0 是第二类间断点（无穷间断点），1 是第一类间断点（跳跃间断点）.

八、 提示：(1) 用函数的单调性证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, 取 $x=\dfrac{1}{n}$ 即得；

(2) 由(1)可得 $a_n-a_{n-1}<0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 单调减；　又由(1)可得

$\ln(1+\dfrac{1}{1})=\ln2-\ln1<1,\quad \ln(1+\dfrac{1}{2})=\ln3-\ln2<\dfrac{1}{2},\quad\cdots,\quad \ln(1+\dfrac{1}{n-1})=\ln n-\ln(n-1)<\dfrac{1}{n-1},$

各式相加得 $\ln n<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}$, 即 $a_n>0$. 数列 $\{a_n\}$ 单调减有下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 极限存在.

九、 提示：用介值定理证明 $\exists\eta\in[1,2]$, 使得 $f(\eta)=1$, 由拉格朗日中值定理可得 $\exists\xi\in(0,\eta)$, 使得 $f'(\xi)=0$.