微积分 I（第一层次）期中试题 2012.11.24

一、（7 分）用极限定义（$\varepsilon-\delta$ 语言）证明函数的极限：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{4}$.

二、（8 分）指出函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{x\,|x^2-1|}$ 的间断点，并讨论其类型 .

三、（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ，求 $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{x^2}}$.

四、（21 分，每小题 7 分）计算下列各题：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{x}{e^{x^2}-1}\right]$；

（2） 设 $y=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}+2^{\sin x}$ ，求 dy 以及 $dy|_{x=2}$ ；

（3） 过 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，求该切线方程以及对应的法线方程 .

五、（10 分）设 $x_1=2,\ x_{n+1}=\dfrac{2x_n+1}{x_n+2}$. 论证数列 $\{x_n\}$ 极限的存在性并求之.

南京大学数学系

六、（10 分）设 $f(x)=e^x\ln(1+x)+\sin x+ax^2+bx+c,\ f(x)=o(x^2)$，求 a,b,c ，并求 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数，指出其无穷小主部 .

七、（12 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上二阶可导，$f(0)=0,\ f(1)=2,\ f(\dfrac{\pi}{2})=1.$

（1）求证：$\exists\,\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ ，使得 $f'(\xi)=0$.

（2）求证：$\exists\,\eta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ ，使得 $f'(\eta)+f''(\eta)\tan\eta=0$.

八、（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x},\ x<0;\\ x^2,\quad\ \ ,x\ge 0.\end{cases}$，求 $f'(x)$ ，讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性 .

九、（14 分）讨论函数 $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点以及渐近线，绘制函数的简图 .

微积分 I（第一层次）期中试题 2013.11.16

一、（8 分）用极限定义（$\varepsilon - N$ 语言）证明数列的极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$.

二、（8 分）讨论函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2+x-2}$ 的间断点，并指出其类型（说明理由）.

三、（8 分）在 $x\to 0$ 时，求函数 $\arcsin x - x$ 关于 x 的无穷小的阶以及无穷小主部.

四、（35 分，每小题 7 分）计算下列各题：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arcsin\dfrac{2013}{n}-\arcsin\dfrac{2013}{n+1})$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}[(2+x)e^{3/x}-x]$；

（3）设 $y=2^{\arctan\frac{1}{x}}$，求 dy；

(4) 设 $y=\dfrac{1}{x^2+8x+7}$，求 $y^{(n)}$；

（5）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$ 且 $g(0)=g'(0)=0, g''(0)=8$，求 $f'(0)$.

南京大学数学系

五、（10 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sin\dfrac{1}{n})^{5\csc^2\frac{1}{n}}$.

六、（10 分）设 $0<x_1<1, x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}, n=1,2,\cdots$. 论证数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

七、（13 分）设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

（1）求 $f'(x)$ ，（2）讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

八、（8 分）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导且 $f'(x)\neq 0$，又 $f(a)=1, f(b)=0$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)(\xi\neq\eta)$，使得 $1/f'(\xi)+2/f'(\eta)=3(a-b)$.

2014-2015 学年第一学期微积分 I（第一层次）期中试题 2014.11.22

一、（12 分，每小题 6 分）用极限定义证明下列极限：

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+1}{3n^2-n+6}=1$；　　2、$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$.

二、（12 分，每小题 6 分）计算下列各题：

1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x(5^x-1)\ln(1-3x)}{\arcsin x(\cos x-1)\arctan x}$；

2、设 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)$，求 $f'(0)$.

三、（16 分，每小题 8 分）计算下列极限：

1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$；　　2、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$.

四、（8 分）设 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x^2-3x+2)}$，求 $f(x)$ 的间断点，并指出间断点的类型.

五、（8 分）设 $y=y(x)$ 由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 所确定，求 dy .

南京大学数学系

六、（12 分）设 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}\ (c>1), n=1,2,3,\cdots$，讨论该数列 $\{x_n\}$ 的收敛性. 如果数列收敛，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

七、（10 分）求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$.

八、（10 分） 设 $f(x)=e^x\ln(1+x)+\sin x+ax^2+bx+c, f(x)=o(x^2)$,求 a,b,c, 并求 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

九、（12 分）证明：（1）可导的奇函数的导数为偶函数，可导的偶函数的导数为奇函数；

（2）设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，$f(1)=1$. 证明：

① 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=1$. ②存在 $\eta\in(-1,1)$ 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

微积分 I（第一层次）期中试题 2015.11.14

一、（8 分×2=16 分）用极限定义证明下列极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{3n^2+1}=\dfrac{1}{3}$ ；　　2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$.

二、（8 分）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$，讨论函数 $f(x)$ 的连续性，并指明间断点的类型.

三、（8 分）设 x 为基准无穷小，试求出无穷小 $\arcsin x-x$ 关于 x 的阶和无穷小主部.

四、（8 分×5=40 分）计算下列各题：

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，且 $f(0)=1, f'(0)=-1$，求

$$\lim_{n\to\infty}\left[n(e^{1/n}-1)\right]^{\frac{1}{1-f(1/n)}};$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{-3x})-\cos(xe^{3x})}{x^3}$；

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$；

4.设 $y=x\cdot\sqrt[7]{\dfrac{x^5}{x^3+8}}+(5+\sin x)^{\cos x}$，求 y' 以及 dy ；

5. 设 $y=\cos^4 x-\sin^4 x$，求 $y^{(n)}$.

五、（8 分）设 a_1,a_2,a_3 为正数，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为实数，满足 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 证明：方程

$\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0$ 在区间 $(\lambda_1,\lambda_2),(\lambda_2,\lambda_3)$ 内各有一个根.

六、（10 分）设 $x_1=1, x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性，并求之.

七、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1, f(1)=0$. 设常数 $a>0, b>0$，证明：（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$；

（2）存在 $\eta,\mu\in(0,1),\eta\neq\mu$，使得 $a\left(\dfrac{1}{f'(\eta)}+1\right)+b\left(\dfrac{1}{f'(\mu)}+1\right)=0$.

南京大学数学系

微积分 I（第一层次）期中试题 2016.11.12

一、（6 分×2=12 分）用极限定义证明下列极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2+1}=0$ ； 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}=2$.

二、（8 分）讨论函数 $y=|x(x^2-1)|\sin x$ 的可导性 .

三、（8 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(0)=f'(0)=1$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$.

四、（8 分×5=40 分）计算下列各题：

1. 已知函数 $y=y(x)$ 由 $e^y-e^{-x}+xy=0$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 点处的切线方程 .

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)})$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

4.设函数 $y=\ln(\sin x)+x^{x^a}+\dfrac{5^{3x}}{2^x}\,(a\in R)$，求 y' 以及 dy .

南京大学数学系

5. 设 $f(x)=\ln(e^{\sin 2x}(x-1))$，求 $f^{(n)}(x)$.

五、（12 分）已知 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$，

1. 证明： $\dfrac{k}{n+k}<\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)<\dfrac{k}{n}$, 其中$k$为正整数.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

六、（12 分）设 $f(x)=x-(ax+b\sin x)\cos x$ ，并设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^5}$ 存在且不为零，求常数 a,b 及此极限值.

七、（8 分）$f(x)$ 是以 1 为周期的连续函数，a 是一个实数，试证明存在 $\xi\in[0,1]$ 内，使得 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

微积分 I（第一层次）期中试题 2017.11.18

一、（本题共有两小题，每小题 6 分，共 12 分）用极限定义证明下列极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{2n-5}=0$，　　2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}$.

二、（本题共有三小题，每小题 6 分，共 18 分）计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$；　2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\arctan x)$；　3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$.

三、（10 分）设 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin ax}-1, & x\geq 0, \\ b\ln(1+x), & x<0 \end{cases}$，其中参数 $a,b\neq 0$，如果 $f''(0)$ 存在，求 a,b.

四、（10 分）当 $x\to 0$ 时，以 x 为基准无穷小，求 $(\cos x-1)\ln(1+x)$ 的无穷小主部.

五、（10 分）求方程 $x^3+y^3-3axy=0\,(a>0)$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 的二阶导数 y''.

六、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=1$，证明：存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\eta)}{\eta}$.

南京大学数学系

七、（10 分）求参数方程 $\begin{cases} x=4\cos\theta, \\ y=1+\sin\theta \end{cases}(0\leq\theta<\pi)$ 所确定的曲线在 $x=2$ 处的切线方程和法线方程.

八、（10 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f'(x)=-xf(x), f(0)=1$，证明：对任意的正整数 k，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^k f(x)=0$.

九、（10 分）设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，其中 a,b,c,d 为常数且 $a\neq 0$，证明 $f(x)$=0 有三个不相等的实根的必要条件为 $b^2-3ac>0$.