# 微积分 I（第一层次）期中试题 2012.11.24

一、（7 分）用极限定义（$\varepsilon-\delta$ 语言）证明函数的极限：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{4}$ .

二、（8 分）指出函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{x\,|\,x^2-1\,|}$ 的间断点，并讨论其类型 .

三、（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ，求 $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{x^2}}$ .

四、（21 分，每小题 7 分）计算下列各题：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{x}{e^{x^2}-1}\right]$ ;

（2）设 $y=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}+2^{\sin x}$ ，求 $dy$ 以及 $dy|_{x=2}$ ；

（3）过 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，求该切线方程以及对应的法线方程 .

五、（10 分）设 $x_1=2,\ x_{n+1}=\dfrac{2x_n+1}{x_n+2}$ . 论证数列 $\{x_n\}$ 极限的存在性并求之.

六、（10 分）设 $f(x)=e^x\ln(1+x)+\sin x+ax^2+bx+c,\ f(x)=o(x^2)$，求 $a,b,c$，并求 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数，指出其无穷小主部 .

七、（12 分）设函数 $f(x)$ 在 $[\,0,\dfrac{\pi}{2}\,]$ 上二阶可导，$f(0)=0,\ f(1)=2,\ f(\dfrac{\pi}{2})=1$.

（1）求证：$\exists\,\xi\in(\,0,\dfrac{\pi}{2}\,)$ ，使得 $f'(\xi)=0$.

（2）求证：$\exists\,\eta\in(\,0,\dfrac{\pi}{2}\,)$ ，使得 $f'(\eta)+f''(\eta)\tan\eta=0$.

八、（10 分）设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x},\ x<0\,; \\ x^2\,,\qquad ,\ x\ge 0\,. \end{cases}$，求 $f'(x)$ ，讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性 .

九、（14 分）讨论函数 $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点以及渐近线，绘制函数的简图 .

# 微积分 I（第一层次）期中试题 2013.11.16

一、（8 分）用极限定义（$\varepsilon - N$ 语言）证明数列的极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$.

二、（8 分）讨论函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2+x-2}$ 的间断点，并指出其类型（说明理由）.

三、（8 分）在 $x\to 0$ 时，求函数 $\arcsin x - x$ 关于 $x$ 的无穷小的阶以及无穷小主部.

四、（35 分，每小题 7 分）计算下列各题：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arcsin\dfrac{2013}{n}-\arcsin\dfrac{2013}{n+1})$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}[(2+x)e^{3/x}-x]$；

（3）设 $y=2^{\arctan\frac{1}{x}}$，求 $dy$；

(4) 设 $y=\dfrac{1}{x^2+8x+7}$，求 $y^{(n)}$；

（5）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$ 且 $g(0)=g'(0)=0, g''(0)=8$，求 $f'(0)$.

五、（10 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sin\dfrac{1}{n})^{5\csc^2\frac{1}{n}}$.

六、（10 分）设 $0<x_1<1, x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}, n=1,2,\cdots$. 论证数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

七、（13 分）设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0;\\ 0, \qquad x=0.\end{cases}$

（1）求 $f'(x)$ ，（2）讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

八、（8 分）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导且 $f'(x)\neq 0$，又 $f(a)=1, f(b)=0$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)(\xi\neq\eta)$，使得 $1/f'(\xi)+2/f'(\eta)=3(a-b)$.

# 2014-2015 学年第一学期微积分 I（第一层次）期中试题 2014.11.22

一、（12 分，每小题 6 分）用极限定义证明下列极限：

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+1}{3n^2-n+6}=1$；　　2、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$.

二、（12 分，每小题 6 分）计算下列各题：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x(5^x-1)\ln(1-3x)}{\arcsin x(\cos x-1)\arctan x}$；

2、设 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)$，求 $f'(0)$ .

三、（16 分，每小题 8 分）计算下列极限：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$；　　2、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$.

四、（8 分）设 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x^2-3x+2)}$，求 $f(x)$ 的间断点，并指出间断点的类型.

五、（8 分）设 $y=y(x)$ 由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 所确定，求 $dy$ .

六、（12 分）设 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}\ (c>1), n=1,2,3,\cdots$，讨论该数列 $\{x_n\}$ 的收敛性. 如果数列收敛，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

七、（10 分）求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$.

八、（10 分） 设 $f(x)=e^x\ln(1+x)+\sin x+ax^2+bx+c, f(x)=o(x^2)$，求 $a,b,c$, 并求 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

九、（12 分）证明：（1）可导的奇函数的导数为偶函数，可导的偶函数的导数为奇函数；

（2）设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，$f(1)=1$. 证明：

① 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=1$. ②存在 $\eta\in(-1,1)$ 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

**2012 级参考答案：**

一、略　二、$f(x)$ 的间断点为 0，$\pm1$ ．0 为可去间断点 ．1 为无穷间断点或第二类间断点 ．　−1 为跳跃间断点 ．　三、$\exp(\frac{f''(0)}{2})$ ．

四、（1）$\frac{1}{2}$；（2）$dy=\left(\frac{1}{1+x^2}+2^{\sin x}\ln 2\cos x\right)dx$，$dy|_{x=2}=(\frac{1}{5}+2^{\sin 2}\ln 2\cos 2)dx$ ．

(3)切线方程为：$x-2y-1=0.$，对应的法线方程为：$2x+y-7=0$ ．

五、1 ．六、 $c=0,b=-2,a=-1/2$．且 $f(x)$ 的无穷小阶数为 3，无穷小主部为 $\frac{x^3}{6}$ ．

七、（1） 提示：对 $f(x)$ 分别在 $[0,1]$， $[1,\frac{\pi}{2}]$ 上使用 Lagrange 定理然后对 $f'(x)$ 使用零点定理，．　（2） 构造函数 $F(x)=\sin x\, f'(x)$.

八、 $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x<0,\\ 2x, & x>0.\end{cases}$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，左不连续（或 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续）.

九、函数的定义域为 $x\neq0$， $x=0$ 为函数的垂直渐近线. 斜渐近线： $y=x+3$ ．

函数的增区间为：$x<-1,x>0$，函数的减区间为：$(-1,0),(0,2)$，在 $x=-1$ 处取得极大值 $y(-1)=1/e$，在 $x=2$ 处函数取得极小值 $y(2)=4\sqrt{e}$.

函数的上凹区间为 $(-\frac{2}{5},0),(0,+\infty)$，函数的下凹区间为 $(-\infty,-2/5)$，拐点为 $(-\frac{2}{5},\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$ ．　图省略

**2013 级参考答案：**

二、$0,1,-2$ 是 $f(x)$ 的间断点. 0 是 $f(x)$ 的无穷型间断点. 1 是 $f(x)$ 的可去间断点. $-2$ 是 $f(x)$ 的无穷型间断点.

三、$\arcsin x-x$ 关于 $x$ 的无穷小的阶是 3，无穷小主部为 $x^3/6$.

四、（1）2013. （2） 5. （3） $dy=-\frac{\ln 2}{1+x^2}2^{\arctan\frac{1}{x}}dx$.

(4) $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{6}(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+7)^{n+1}})$ （5） $f'(0)=4$.

五、$e^{-5/6}$. 六、$\{x_n\}$单调下降. $0<x_n<1,\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

七、（1） $f'(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}, & x\neq 0,\\ \frac{\pi}{2}, & x=0.\end{cases}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4})=\frac{\pi}{2}=f'(0)$，所以$f'(x)$在$x=0$处连续.

八、（8 分）**证明：**即证：$\frac{1/3}{f'(\xi)}+\frac{2/3}{f'(\eta)}=a-b$.因为$f(a)=1, f(b)=0$，又$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，所以由介值定理，存在一个$c\in(a,b)$使得$f(c)=2/3$.

在$[a,c]$上对$f(x)$使用 Lagrange 定理，存在一个$\xi\in(a,c)$使得

$f(c)-f(a)=f'(\xi)(c-a)$，也即$1/3=f'(\xi)(a-c)$，也即$\frac{1/3}{f'(\xi)}=(a-c)$（i）.

在$[c,b]$上对$f(x)$使用 Lagrange 定理，存在一个$\eta\in(c,b), \xi\neq\eta$使得

$f(b)-f(c)=f'(\eta)(b-c)$，也即$-2/3=f'(\eta)(b-c)$.也即$\frac{2/3}{f'(\eta)}=(c-b)$（ii）

将(i)、(ii)两式相加，即得 $\frac{1/3}{f'(\xi)}+\frac{2/3}{f'(\eta)}=a-b$，也即$1/f'(\xi)+2/f'(\eta)=3(a-b)$.

**2012 级参考答案：**

一、略 二、 1、$6\ln 5$； 2、$f'(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$.

三、 1、$\frac{1}{12}$； 2、$e^{-\sqrt{2}}$. 四、0，1，2 为函数的间断点. 0 为跳跃间断点；1 为无穷间断点；2 为可去间断点. 五、 $dy=\frac{x+y}{x-y}dx$. 六、 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$. 七、1.

八、 $c=0$；$b=-2$；$a=-1/2$. $x\to 0$时$f(x)$的无穷小阶数为 3，无穷小主部为$x^3/6$.

九、（1）略 。（2） $f(0)=0$. ① 构造函数 $F(x)=f(x)-x, x\in[0,1]$，

② 构造函数 $\mathrm{G}(x)=e^x[f'(x)-1], x\in[-1,1]$.