NANJING UNIVERSITY 南京大學 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

函数逼近与计算

温丹苹
邮箱：dpwen@nju.edu.cn
办公室：工管院协鑫楼306

目录

1 基本概念

2 正交多项式

3 最佳平方逼近

4 曲线拟合的最小二乘法

1 基本概念

- **函数逼近**

目标：在给定精度下求计算次数最少的近似公式，这就是函数逼近与计算要解决的问题。

- 对于函数类A中给定的函数$f(x)$，要求在另一类较简单的便于计算的函数类B中，求函数P（x）$\in B \subseteq A$，使P（x）与f（x）之差在某种度量意义下最小。

注：

* 本章研究的函数类A通常为区间[a,b]上的连续函数，记C[a,b]。

* 函数类B通常是代数**多项式或三角多项式**。

1 基本概念

- 函数逼近 vs 函数插值

函数逼近：给定 f(x)，在某个简单易算的函数类中找一个 p(x)，使得 p(x) 在某种度量下距离 f(x) 最近。

函数逼近中的两个关键点：

(1) **函数空间**，即用什么样的函数来逼近 $f(x)$

(2) **度量标准**，即采用什么样的评判标准

函数插值：给定数据表，寻找到一个简单易算的 p(x)，使得 $p(x_i) = y_i$。

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln(x)$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

1 基本概念

■ **Weierstrass（魏尔施特拉斯）定理**

若函数 $p(x) \in H_n$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n, \quad \text{其中} a_i \text{为实数}$$

$p(x)$ 由系数唯一确定。$1, x, \cdots, x^n$ 线性无关，是 H_n 的一组基，

$H_n = \mathrm{span}\{1, x, \cdots, x^n\}$ 是 $n+1$ 维的，$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$为 $p(x)$ 的坐标。

- **Weierstrass定理：**

设 $f(x) \in C[a, b]$，则对任何 $\epsilon > 0$，总存在一个代数多项式 $p(x)$，使

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - p(x)| < \epsilon$$

在 $[a, b]$ 上一致成立。

1 基本概念

- **函数的范数：**

区间$[a,b]$上的所有实连续函数组成一个空间，记作 $C[a,b]$. $f\in C[a,b]$的范数定义为

$$\| f \|_\infty = \max_{a\leqslant x\leqslant b} | f(x) |,$$

$\|\cdot\|_\infty$称为∞-范数，它满足范数$\|\cdot\|$的三个性质：

(1) $\| f \|\geqslant 0$，当且仅当 $f\equiv 0$ 时才有$\| f \|=0$； 正定

(2) $\| af \| = |a| \, \| f \|$对于任意 $f\in C[a,b]$成立，a 为任意实数； 齐次

(3) 对于任意 $f,g\in C[a,b]$，有

$$\| f+g \| \leqslant \| f \| + \| g \|.$$

三角不等式

空间 $C[a,b]$可与向量空间类比，函数 $f\in C[a,b]$可看成向量.

1 基本概念

- **函数的范数：**

$C[a,b]$: $f\in C[a,b]$，可定义三种常用范数

- ∞-范数或最大范数

$$\|f\|_\infty = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$$

- 1-范数

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|\mathrm{d}x$$

- 2-范数

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega f(x)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

1 基本概念

- **两种常用度量标准**

①一致逼近，或均匀逼近：

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\|_\infty=\max_{\boldsymbol{a}\le x\le b}|f(x)-P(x)|$$

②平方逼近，或均方逼近：

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\|_2=\sqrt{\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}[f(x)-P(x)]^2\mathbf{d}\boldsymbol{x}}$$

注：

* 用于度量代数多项式$\mathrm{P}_n(x)$逼近$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$

- **内积与内积空间：**

设 X 是数域 $K(\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C})$ 上的线性空间，$\forall u, v \in X$，有 K 中一个数与之对应，记为 (u, v)，满足条件：

(1) $(u, v) = \overline{(v, u)}, \forall u, v \in X;$	对称性
(2) $(\alpha u, v) = \alpha(u, v), \alpha \in K, u, v \in X;$	齐次性
(3) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w), \forall u, v, w \in X$	可加性
(4) $(u, u) \geqslant 0$, 当且仅当 $u = 0$ 时 , $(u, u) = 0.$	正定性

则称 (u, v) 为 X 上 u 与 v 的内积。

内积空间：定义了内积的线性空间。当 $K = \mathbb{R}$，(1) 即 $(u, v) = (v, u)$ 共轭

如果 $(u, v) = 0$，则称 u 与 v正交，这是向量垂直概念的推广。

- **内积与内积空间：**

例: $\mathbb{R}^n$ 的内积

设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$， $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, 则其内积定义为

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

由此导出向量 2-范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

一般地，若给定实数 $\omega_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，称之为权系数，则可以定义加权内积

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i^2 \right)^{1/2}.$$

- **函数——内积与内积空间：**

例: $C[a,b]$ 的内积

设函数 $f, g \in C[a,b]$，则其内积定义为

$$(f,g) = \int_a^b fg\mathrm{d}x.$$

由此导出 2-范数

$$\|f\|_2 = (f,f)^{1/2} = \left(\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

- **Gram（格拉姆）矩阵：**

Gram矩阵是两两向量的内积组成，Gram矩阵可以反映出该组向量中各个向量之间的某种关系。

定理

设 X 为内积空间，$u_1, u_2, \cdots, u_n \in X$，Gram 矩阵

$$G = \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & (u_2, u_1) & \cdots & (u_n, u_1) \\ (u_1, u_2) & (u_2, u_2) & \cdots & (u_n, u_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (u_1, u_n) & (u_2, u_n) & \cdots & (u_n, u_n) \end{pmatrix}$$

对称矩阵

非奇异的充分必要条件是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 线性无关。

证明：G 非奇异等价于行列式 $\det G \neq 0$，等价于关于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性方程组

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j, u_k\right) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j u_j, u_k) = 0, \ \ k = 1, 2, \cdots, n$$

只有零解。

注意到上式

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j, u_k\right)=0,\quad k=1,2,\cdots,n$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j, \sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\cdots+\alpha_n u_n=0.$$

线性无关意味着上式只有零解 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$，证毕。

内积空间上可以由内积导出一种范数，即

$$\|u\|=\sqrt{(u,u)},\quad u\in X$$

容易验证满足范数定义的三个条件。（满足正定、齐次、三角不等式）

■ 内积与内积空间：

- Cauchy-Schwarz不等式定理：

  设X为内积空间，对$\forall u,v\in X$，有

$|(u,v)|^2 \le (u,u)(v,v)$，即$|(u,v)|^2 \le \|u\|_2\cdot\|f\|_2$.

证明.

当 $v=0$ 时，显然成立。设 $v\neq 0$，对任何数 λ 有

$0\leqslant(u+\lambda v,u+\lambda v)=(u,u)+2\lambda(u,v)+\lambda^2(v,v)$. 取 $\lambda=-(u,v)/(v,v)$, 代人右端, 得

$$(u,u)-2\frac{|(u,v)|^2}{(v,v)}+\frac{|(u,v)|^2}{(v,v)}\geqslant 0,$$

由此即得 $v\neq 0$ 时

$$|(u,v)|^2\leqslant(u,u)(v,v).$$

1 基本概念

- **权函数：**

定义 设在区间(a,b)内，非负函数$\rho(x)$满足以下条件，就称$\rho(x)$为区间(a,b)内的**权函数**：

1° $\int_a^b |x|^n \rho(x)\mathrm{d}x \ (n=0,1,\cdots)$ 存在；

2° 对于非负的连续函数$g(x)$，若

$$\int_a^b g(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则在(a,b)内$g(x)\equiv 0$.

* 引入权函数的概念来对**区间上每一点的重要性（权重）进行区分**。

1 基本概念

- **带权的函数内积和范数：**

例 2 $C[a,b]$上的内积. 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，$\rho(x)$是$[a,b]$上给定的权函数，则可定义内积

$$(f(x),g(x))=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{1.15}$$

容易验证它满足内积定义的四条性质，由此内积导出的范数为

$$\| f(x)\|_2=(f(x),f(x))^{\frac{1}{2}}=\left[\int_a^b \rho(x)f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.16}$$

称(1.15)式和(1.16)式分别为带权 $\rho(x)$的内积和范数，特别常用的是 $\rho(x)\equiv 1$ 的情形，即

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

$\rho(x)=1$ **意味着所有区间中的点具有同等重要性。**

$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **则意味着靠近区间端点处的点更加重要而区间中点处的点最不重要。**

1 基本概念

- **最佳逼近多项式：**

如果是在多项式中找最佳逼近，那就是最佳多项式逼近。

定义：记 H_n 为所有次数不超过 n 的多项式组成的集合，给定函数 $f(x)\in C[a,b]$，若 $p^*(x)\in H_n$ 使得

$$\|f(x)-p^*(x)\| = \min_{p(x)\in H_n}\|f(x)-p(x)\|$$

则称 $p^*(x)$为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 n 次最佳逼近多项式。

† 取不同的范数，可以定义不同的最佳逼近方式。

1 基本概念

- **常用最佳逼近：**

①最佳一致逼近多项式：

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{P}*(\boldsymbol{x})\|_\infty=\min_{P(x)\in H_n(x)}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\|_\infty$$

$$=\min_{P(x)\in H_n(x)}\max_{\boldsymbol{a}\le x\le b}|f(x)-P(x)|$$

②最佳平方逼近多项式：

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{P}*(\boldsymbol{x})\|_2=\min_{P(x)\in H_n(x)}\sqrt{\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}[f(x)-P(x)]^2\mathbf{d}\boldsymbol{x}}$$

1 基本概念

- **最小二乘拟合：**

x	x_0	x_1	…	x_m
$f(x)$	y_0	y_1	…	y_m

什么是最小二乘拟合

给定数据表，寻找 $g^*(x) \in \Phi$，使得

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i - g^*(x_i)|^2 = \min_{g\in\Phi} \sum_{i=1}^{m} |y_i - g(x_i)|^2$$

称 $g^*(x)$为 $f(x)$ 的最小二乘拟合函数。

若 $\Phi=H_n$, 则称 $g^*(x)$ 为 n 次最小二乘拟合多项式。

† 最小二乘是数据拟合方法中常用的一种方法。

2 正交多项式

■ 函数的正交

定义：设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$，$\rho(x)$ 是 $[a, b]$ 上的权函数，若

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上 带权 $\rho(x)$ 正交。

■ 正交函数族

定义：设函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots \in C[a, b]$，

$\rho(x)$ 是 $[a, b]$ 上的权函数，若

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ A_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

则称 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上 带权 $\rho(x)$ 的正交函数族。

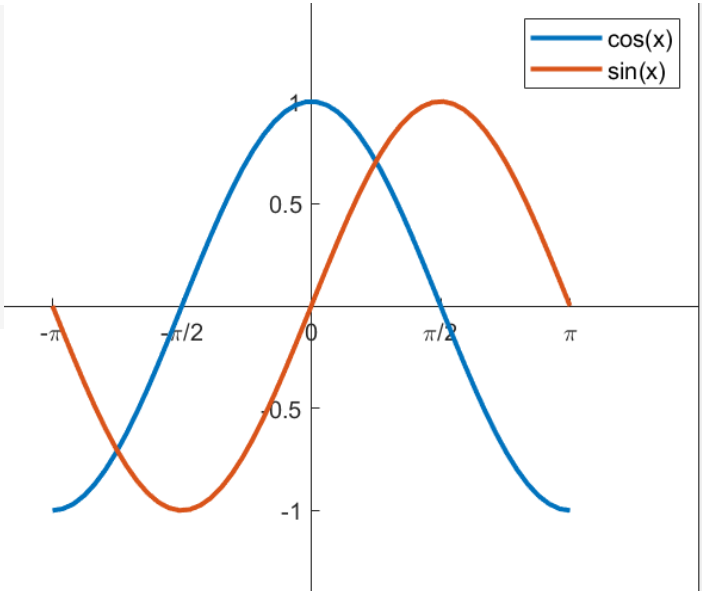
- 若所有$A_i = 1$，则称为 **标准正交函数族**。

■ 正交函数例子

例：三角函数系

$$1,\quad \cos x,\quad \sin x,\quad \cos 2x,\quad \sin 2x,\quad \ldots$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上是带权 $\rho(x)=1$ 的正交函数族。



证：通过直接计算可得

$$(1,\ 1)=\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi,$$

$$(1,\cos mx)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\ \mathrm{d}x=0,\quad (1,\sin mx)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\ \mathrm{d}x=0$$

$(m = 1, 2, 3, \ldots)$

$$(\cos nx,\cos mx)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\ \mathrm{d}x=\pi\cdot\delta_{nm}$$

$$(\sin nx,\sin mx)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\ \mathrm{d}x=\pi\cdot\delta_{nm}\qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$(\cos nx,\sin mx)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\ \mathrm{d}x=0\qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Trigonometric_function.m

■ 正交多项式

定义： 设 $\varphi_k(x)$ 是首项系数不为 0 的 k 次多项式，$\rho(x)$ 是 $[a, b]$ 上的权函数，若

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ A_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

则称 $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交，称 $\varphi_k(x)$ 为 k 次正交多项式。

多项式序列

2 正交多项式

■ 当权函数$\rho(x)$及区间[a, b]给定之后，可由线性无关的一组基$\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$并利用正交化方法构造出**正交多项式序列** $\{\boldsymbol{\varphi_n(x)}\}_0^\infty$:

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_n(x) = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x^n, \varphi_j(x),)}{(\varphi_j(x), \varphi_j(x),)} \cdot \varphi_j(x), n = 1,2, \dots$$

- $\boldsymbol{\varphi_n(x)}$是最高项系数为1的n次多项式。
- 若$\{\boldsymbol{\varphi_n(x)}\}_0^\infty$是正交多项式，则$\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x)$，...，$\varphi_n(x)$线性无关。

证：

若$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) = 0$，

用$\rho(x)\varphi_j(x)(j = 1,2, \dots, n)$乘以上式，并积分得：

$$c_0 \int_a^b \rho(x)\varphi_0(x)\varphi_j(x)dx + c_1 \int_a^b \rho(x)\varphi_1(x)\varphi_j(x)dx + \cdots +$$
$$c_j \int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_j(x)dx + \dots + c_n \int_a^b \rho(x)\varphi_n(x)\varphi_j(x)dx = 0;$$

利用正交性，则

$$c_j \int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_j(x)dx = 0,$$

由于$(\varphi_j, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_j(x)dx > 0$,则$\boldsymbol{c_j = 0}$**对**$\boldsymbol{j = 1, 2, \dots, n}$**成立**。

因此：$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$,..., $\varphi_n(x)$线性无关。

正交多项式性质

性质 1: 设 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 为 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式, H_n 表示所有次数不超过 n 的多项式组成的线性空间, 则

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$$

构成 H_n 的一组基，即对任何 $P(x) \in H_n$，

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x)$$

■ 正交多项式性质

性质 2：设 $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式，则对 $\forall p(x) \in H_{n-1}$，有

$$(p(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b \rho(x) p(x) \varphi_n(x)\, dx = 0$$

即 φ_n 与所有次数小于 n 的多项式正交。

■ 正交多项式性质

性质 3 (三项递推关系)：设 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式, 且首项系数均为 1, 则

$$\varphi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\,\varphi_n(x) - \beta_n \varphi_{n-1}(x) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

其中 $(x\varphi_n(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b \rho(x) x \varphi_n^2(x) dx$

$$\varphi_{-1} = 0, \quad \varphi_0 = 1, \quad \alpha_n = \frac{(x\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}, \quad \beta_n = \frac{(\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1})}$$

性质 4: 设 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式, 则 $\varphi_n(x)$ 在 (a, b) 内有 n 个不同的零点。

2 正交多项式

■ 重要的正交多项式

- 勒让德（Legendre）多项式

当区间为 $[-1,1]$，权函数 $\rho(x)\equiv 1$ 时，由 $\{1,x,\cdots,x^k,\cdots\}$ 正交化得到的多项式称为Legendre 多项式：

$$P_0(x)=1,\quad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

由于$(x^2-1)^n$是$2n$次多项式，求n阶导数后得，

$\mathrm{P_n}(x)=\frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)\ldots(n+1)x^n+a_{\mathrm{n-1}}\,x^{n-1}+\cdots+a_0$

首项系数

$$\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

令

$$\tilde{P}_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n,$$

则 $\tilde{P}_n(x)$ 是首项系数为 1 的 Legendre 多项式.

2 正交多项式

■ 重要的正交多项式

- 勒让德（Legendre）多项式

性质 1

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

性质 2（奇偶性）

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

n为偶数，则为偶函数；
N为奇数，则为奇函数.

性质 3（递推公式）

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

, 且 $p_0(x) = 1, p_1(x) = x$

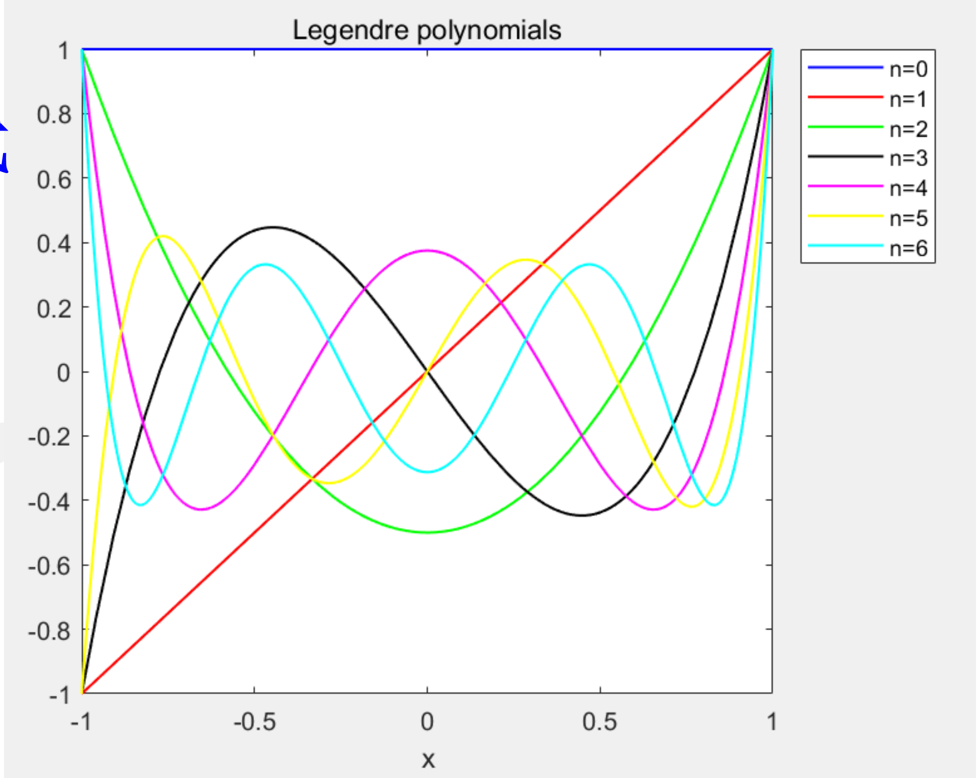
性质 4: $P_n(x)$ 在 (-1,1) 内有 n 个不同的零点。

证明：见李庆扬《数值分析》第5版，2018.

2 正交多项式

■ 重要的正交多项式

- **勒让德（Legendre）多项式**



$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$, 通过递推得

$$P_2(x)=\left(3x^2-1\right)/2$$
$$P_3(x)=\left(5x^3-3x\right)/2$$
$$P_4(x)=\left(35x^4-30x^2+3\right)/8$$
$$P_5(x)=\left(63x^5-70x^3+15x\right)/8$$
$$P_6(x)=\left(231x^5-315x^4+105x^2-5\right)/16$$
$$\vdots$$

Approxi_Legendre.m

■ 重要的正交多项式

- 切比雪夫（Chebyshev）多项式
- 余弦的n倍角公式

$$\cos n\theta = A_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$\cos(0) = 1$$

$$\cos(x) = \cos x$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\cos(5x) = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

■ 重要的正交多项式

- 切比雪夫（**Chebyshev**）多项式

区间为 [-1,1], 权函数 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad |x|\leqslant 1$$

若令 $x=\cos\theta$, 则 $T_n(x)=\cos n\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 由三角恒等式

$$\cos(n+1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta-\cos(n-1)\theta,\quad n=1,2,\cdots$$

性质1(递推关系)

$$\left.\begin{aligned}&T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\quad n=1,2,\cdots,\\&T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x.\end{aligned}\right\}$$

■ 重要的正交多项式

- 切比雪夫（Chebyshev）多项式

区间为 [-1,1], 权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leqslant 1$$

若令 $x = \cos\theta$, 则 $T_n(x) = \cos n\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. 由三角恒等式

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta, \quad n = 1, 2, \cdots$$

性质1(递推关系)

$$\left.\begin{aligned} &T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots, \\ &T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \end{aligned}\right\}$$

■ 重要的正交多项式

- 切比雪夫（Chebyshev）多项式性质

性质 (1)： 正交性

$$(T_n, T_m) = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

性质 (2)： 奇偶性

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

即：$T_{2n}(x)$ 只含偶次幂，$T_{2n+1}(x)$ 只含奇次幂。

■ 重要的正交多项式

• 切比雪夫（Chebyshev）多项式性质

性质 (3)：递推公式

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

其中 $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$

∗ 前两项与 Legendre 多项式相同，但递推公式不同。

2 正交多项式

■ 重要的正交多项式

- **切比雪夫（Chebyshev）多项式性质**

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

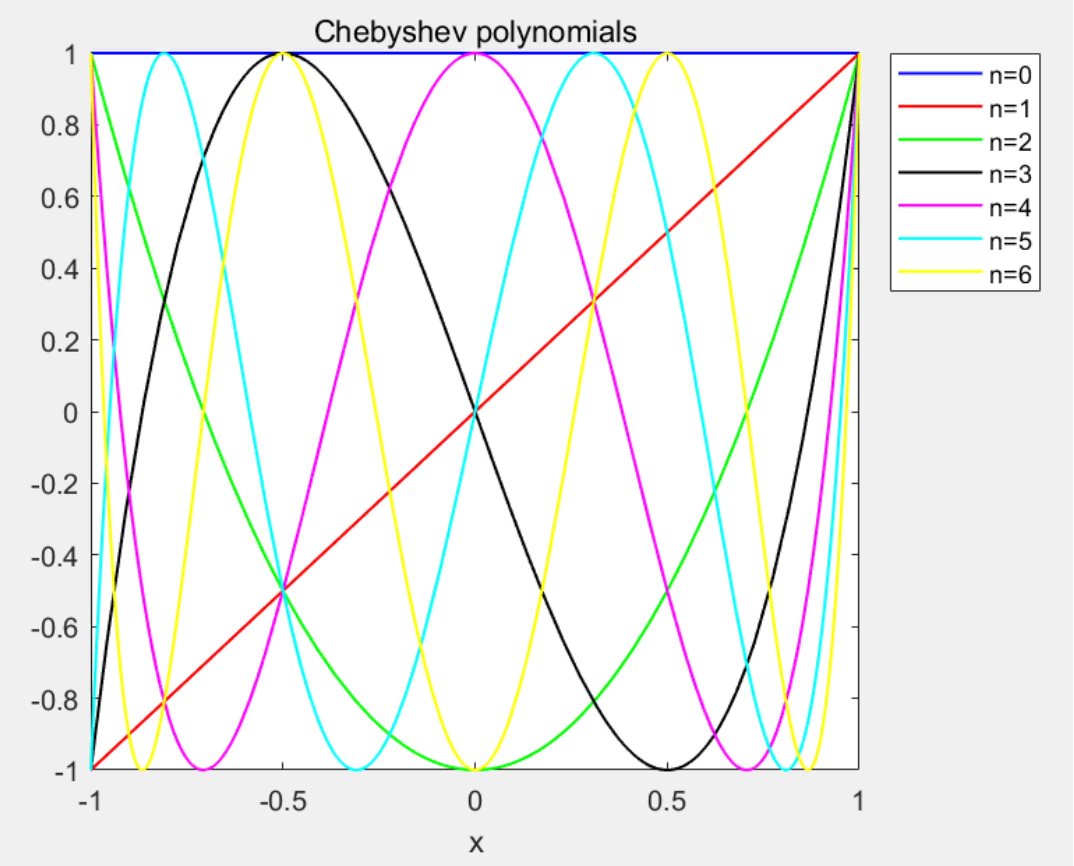
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 18x^4 + 18x^2 - 1$$

$$\vdots$$



$T_n(x)$的最高项系数为$2^{n-1}, n \geq 1$

Approxi_Chebyshev.m

■ 重要的正交多项式

- 切比雪夫（Chebyshev）多项式

性质 (4)： $T_n(x)$ 在 (-1,1) 内有 n 个不同的零点

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

① $T_n(x)$ 的零点都在 (-1,1) 内

② $T_n(x)=0$ 的根都是实数

■ **重要的正交多项式**

- **切比雪夫（Chebyshev）多项式**

性质(5)： $T_n(x)$对零的偏差最小。

- $T_n(x)$的最高项系数$a_n = 2^{n-1}$,(n=1,2,...）

令$\widetilde{T}_0(x) = 1$，$\widetilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ (n=1,2,...）

则$\widetilde{T}_n(x)$是首项系数为1的Chebyshev多项式。

2 正交多项式

■ 重要的正交多项式

- 首项系数为1的切比雪夫（Chebyshev）多项式

定理：$\widetilde{H}_n$ 是 [-1,1] 上次数 $\leqslant n$ 的首项系数为 1 的多项式全体，则对 $\forall\, p(x) \in \tilde{H}_n$，都有

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_n(x)\right| \le \max_{-1\le x\le 1}\left|p(x)\right|$$

且 $\max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}$

证明详见：徐利治，王仁宏，周蕴时．函数逼近的理论与方法．北京：科学出版社，1979．

等价描述：$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\widetilde{T}_n(x)| = \min_{P\in\widetilde{H}_n}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$

$$\left\|\tilde{T}_n(x)\right\|_\infty \le \left\|p(x)\right\|_\infty,\quad \forall\, p(x)\in\tilde{H}_n$$

即 $\tilde{T}_n(x)$ 在集合 $\tilde{H}_n$ 中无穷范数最小：$\tilde{T}_n(x) = \arg\min_{p\in\widetilde{H}_n(x)}\left\|p(x)\right\|_\infty$

最佳一致逼近多项式度量一致

2 正交多项式

■ 重要的正交多项式

- 首项系数为1的切比雪夫（Chebyshev）多项式

几点注记

① 这里的无穷范数是指 $C[-1, 1]$ 上的无穷范数

② 定理中的结论可推广为“在所有次数不超过 n 的首项系数为 1 的多项式中，$\tilde{T}_n(x)$ 的无穷范数最小”

③ 该结论可用于计算 n 次多项式在 $[-1,1]$ 上的 n-1 次最佳一致逼近多项式

性质：设 $f(x)\in H_n$，且首项系数为 $a_n\neq 0$，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 n-1 次最佳一致逼近多项式为

$$f(x)-a_n\tilde{T}_n(x)$$

2 正交多项式

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

其中 $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$

$$\widetilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x),\ n = 1, 2, \cdots$$

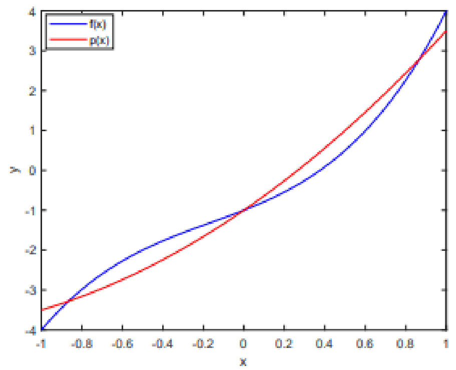
■ 重要的正交多项式

- 切比雪夫（Chebyshev）多项式

例 求 $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 1$ 在 $[-1, 1]$ 上的二次最佳一致逼近多项式。

解:

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x) - a_3\widetilde{T}_3(x) \\ &= 2x^3 + x^2 + 2x - 1 - 2\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right) \\ &= x^2 + \frac{7}{2}x - 1 \end{aligned}$$



注: 计算 n 次多项式在$[a, b]$上的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式需先作变量替换

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t \qquad , t \in [-1,1]$$

- Q & A
- 谢谢