南京大學 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

插值法

温丹苹

邮箱：dpwen@nju.edu.cn

办公室：工管院协鑫楼306

7.6 三次样条插值

• 为什么三次样条插值?

分段线性插值和分段三次 Hermite 插值:

提供了实用的插值方法

(1) 解决了高次插值的振荡现象和数值不稳定现象;

(2) 插值函数（分段多项式）具有一致收敛性;

(3) 分段线性插值（劣势：不光滑）：保证了插值函数整体**连续性**;

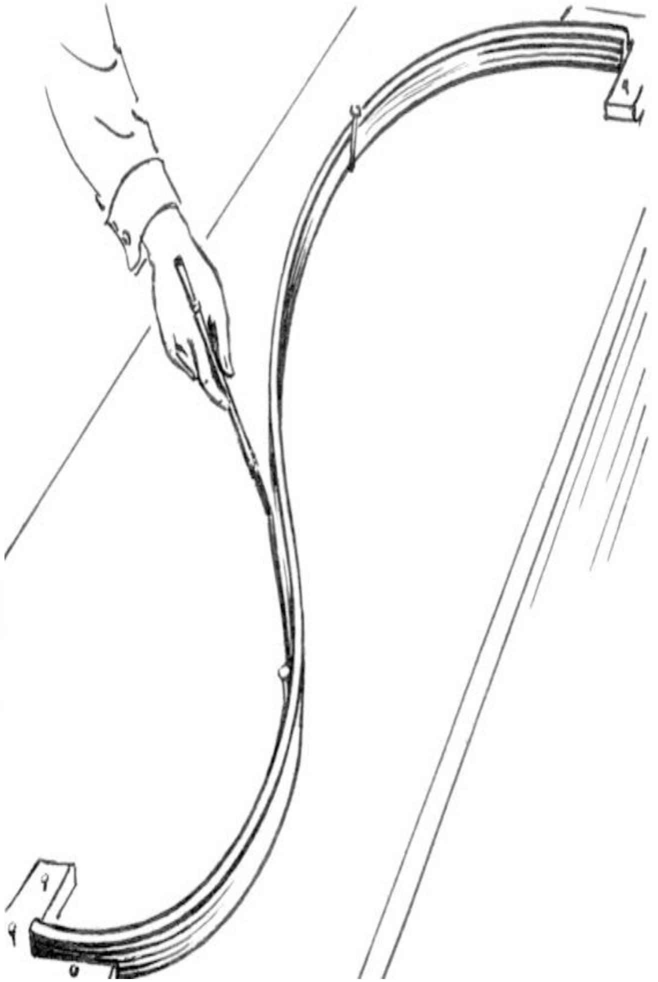
(4) 分段三次 Hermite 插值（劣势：需知导数，仅一阶光滑）：保证插值函数整体一阶连续可导。

* **但是，**某些应用场合，对插值函数具有更高的光滑性要求！ 如机翼设计，船体放样等。

7.6 三次样条插值

* 早期工程师制图时，把富有弹性的细长木条（所谓样条）用压铁固定在样点上， 在其他地方让它自由弯曲，然后沿木条画下曲线，称为**样条曲线**。

* 样条曲线实际上是由**分段三次曲线**连接而成，且**在连接点处具有连续的二阶导数**，从数学上加以概括就得到**三次样条**的概念。



• 三次样条插值定义

给定插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ 及函数值

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

求一个定义在 $[a, b]$ 上的插值函数 $S(x)$，满足：

① $S(x) \in C^2[a,b]$，即函数整体二阶连续可导

② 插值条件：$S(x_k) = f(x_k) = y_k$，$k = 0, 1, 2, \ldots, n$

③ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式

→ 三次样条插值

7.6 三次样条插值

- **三次样条函数**

定义：设插值节点为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

若函数 $S(x) \in C^2[a,b]$，且在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式，则称为**三次样条函数**。

如果 $S(x)$ 同时还满足

$$S(x_k) = f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

则称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的三次样条插值函数。

* 注意：三次样条插值也是分段多项式插值
* 分段线性：**连续**；
* 分段三次Hermite：**可导**；
* 三次样条：**二阶可导**.

7.6 三次样条插值

- **三次样条函数求解**

$S(x)$ 满足:

① $S(x) \in C^2[a,b]$;

② 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 是三次多项式

③ $S(x_k) = y_k$ ， $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

假设我们每段的三次函数都用如下的方程来定义:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \ i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

其中 $s_k(x)$ 为三次多项式，且满足

$$s_k(x_k) = y_k, \ s_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$$

2n个方程

7.6 三次样条插值

* 二阶连续可导

$S(x)\in C^2[a,b]$ ⟹ $S'(x_k^-)=S'(x_k^+),\ S''(x_k^-)=S''(x_k^+)$

上一个分段函数的左导数等于下一个分段函数右导数

内部 ⟹ $\boxed{s_{\underline{k-1}}'(x_k^-)=s_{\underline{k}}'(x_k^+),\ s_{\underline{k-1}}''(x_k^-)=s_{\underline{k}}''(x_k^+)}$

2(n−1) 个方程　$(k=1,2,\ldots,n\text{-}1)$

每个 $s_k(x)$ 均为三次多项式，有 **4** 个待定系数，所以共有 $4n$ 个待定系数，(n个区间) 故需 $4n$ 个方程。前面已经得到 $2n+2(n-1)=4n-2$ 个方程，还缺 **2** 个方程！

- 实际问题通常对样条函数在**两个端点处的状态有要求**，即**所谓的边界条件。**

区间[a, b]的端点x_0, x_n

第一类边界条件

- 给定函数在端点处的一阶导数值，即

$$S'(x_0^+) = f_0', \quad S'(x_n^-) = f_n'$$

第二类边界条件

- 给定函数在端点处的二阶导数值，即

$$S''(x_0^+) = f_0'', \quad S''(x_n^-) = f_n''$$

如果

$$f_0'' = f_n'' = 0$$

则称为自然边界条件，此时样条函数称为自然样条函数。

第三类边界条件

- 若 $f(x)$ 是周期函数，且 $x_n - x_0$ 是一个周期，于是要求 $S(x)$ 也是周期函数, 即满足

$$S(x_0)=S(x_n),\ \ S'(x_0^+)=S'(x_n^-),\ \ S''(x_0^+)=S''(x_n^-)$$

＊ 怎么求三次样条插值

计算 $S(x)$ ⟺ 计算 $s_k(x)$，$x \in [x_k, x_{k+1}]$

设 $S''(x_k) = M_k$，$k = 0, 1, 2, \ldots, n$

由于 $s_k(x)$ 是三次多项式，故 $s_k''(x)$ 为线性函数，且满足

$$s_k''(x_k) = M_k, \quad s_k''(x_{k+1}) = M_{k+1}$$

由线性插值公式可得
$$s_k''(x) = \frac{x_{k+1} - x}{h_k} M_k + \frac{x - x_k}{h_k} M_{k+1}$$

$$h_k = x_{k+1} - x_k$$

求积分，可得
$$s_k(x) = \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6h_k} M_k + \frac{(x - x_k)^3}{6h_k} M_{k+1} + c_1 x + c_2$$

未知数
M_k, M_{k+1}， c_1, c_2

将插值条件 $s_k(x_k)=y_k$，$s_k(x_{k+1})=y_{k+1}$ 代入，即可确定积分常数 c_1 和 c_2

整理后可得 $s_k(x)$ 的表达式为:

$$s_k(x)=\frac{(x_{k+1}-x)^3}{6h_k}M_k+\frac{(x-x_k)^3}{6h_k}M_{k+1}$$

$$+\left(y_k-\frac{M_k h_k^2}{6}\right)\frac{x_{k+1}-x}{h_k}+\left(y_{k+1}-\frac{M_{k+1}h_k^2}{6}\right)\frac{x-x_k}{h_k}$$

$k=0, 1, \ldots, n-1$

只需确定 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 的值，就能给出 $s_k(x)$ 的表达式，从而问题得解。

＊ M_k的计算

条件：　$s_{k-1}'(x_k^-) = s_k'(x_k^+)$

二阶连续可导

直接计算可得

$$s_k'(x) = -\frac{(x_{k+1}-x)^2}{2h_k}M_k + \frac{(x-x_k)^2}{2h_k}M_{k+1} + \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{h_k}{6}(M_{k+1}-M_k)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{h_{k-1}}{6}M_{k-1} + \frac{h_{k-1}+h_k}{3}M_k + \frac{h_k}{6}M_{k+1} = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}}_{\mu_k}M_{k-1} + 2M_k + \underbrace{\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}}_{\lambda_k}M_{k+1} = \underbrace{\frac{6\left(f[x_k,x_{k+1}]-f[x_{k-1},x_k]\right)}{h_{k-1}+h_k}}_{d_k = 6f[x_{k-1},x_k,x_{k+1}]}$$

$$\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}M_{k-1}+2M_k+\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}M_{k+1}=\frac{6\left(f[x_k,x_{k+1}]-f[x_{k-1},x_k]\right)}{h_{k-1}+h_k}$$

$$\boxed{\mu_k \underline{M_{k-1}}+2\underline{M_k}+\lambda_k \underline{M_{k+1}}=d_k}$$

$$\mu_k=\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k},\quad \lambda_k=\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k},\quad d_k=6f[x_{k-1},x_k,x_{k+1}]$$

$$\mu_k+\lambda_k=1$$

$k=1, 2, \ldots, \underline{n\text{-}1}$

共 n-1 个方程 + 边界条件，即可确定 n+1 个未知量 $M_0, M_1, \cdots, M_n$

* 边界条件？

＊ 第一类边界条件

$$S'(x_0^+) = f_0'\ ,\ S'(x_n^-) = f_n'$$

$$s_0'(x_0^+) = f_0'\ ,\ s_{n-1}'(x_n^-) = f_n'$$

$$2M_0 + M_1 = 6\left((y_1 - y_0)/h_0 - f_0'\right)/h_0 \triangleq d_0$$

$$M_{n-1} + 2M_n = 6\left(f_n' - (y_n - y_{n-1})/h_{n-1}\right)/h_{n-1} \triangleq d_n$$

与前面的 n-1 个方程联立可得

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{d_0} \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \underline{d_n} \end{bmatrix}$$

n+1 阶三对角方程组

＊ 第二类边界条件

$$S''(x_0^+) = f_0'' \text{，} S''(x_n^-) = f_n''$$

设 $S''(x_k) = M_k$， $k = 0, 1, 2, \dots, n$

求得 $M_0 = f_0''$，$M_n = f_n''$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 f_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix}$$

n-1 阶三对角方程组

* 第三类边界条件

$$S'(x_0^+) = S'(x_n^-),\ S''(x_0^+) = S''(x_n^-)$$

$$M_0 = M_n,\ \ \lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

$$\lambda_n = h_0/(h_0 + h_{n-1}),\ \ \mu_n = h_{n-1}/(h_0 + h_{n-1})$$

$$d_n = 6\left(f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]\right)/(h_0 + h_{n-1})$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

n 阶线性方程组

＊ 具体计算过程

性质：上述三个线性方程组都存在唯一解。

具体计算过程

(1) 根据插值条件和边界条件给出 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 的方程组

(2) 求解该线性方程组

(3) 将 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 代入 $s_k(x)$，写出 $S(x)$ 在整个插值区间上的分段表达式

7.6 三次样条插值

第一类边界条件

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

第二类边界条件

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 f_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix}$$

第三类边界条件

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

三弯矩方程

工程上称
二阶导数
为弯矩

二阶导数M_k在力学上解释为细梁在x_i截面处的弯矩，并得到的弯矩只与相邻两个弯矩有关，故称为三弯矩法。

7.6 三次样条插值

将 $s_k(x)$ 写成如下形式

$$s_k(x) = a_3(x - x_k)^3 + a_2(x - x_k)^2 + a_1(x - x_k) + a_0$$

$$s_k(x) = \frac{M_{k+1} - M_k}{6h_k}(x - x_k)^3 + \frac{M_k}{2}(x - x_k)^2 + \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k(M_{k+1} + 2M_k)}{6}\right)(x - x_k) + y_k$$

* MATLAB 中三次样条插值函数 **spline** 输出的多项式是按上面的格式输出的。

＊ 插值举例

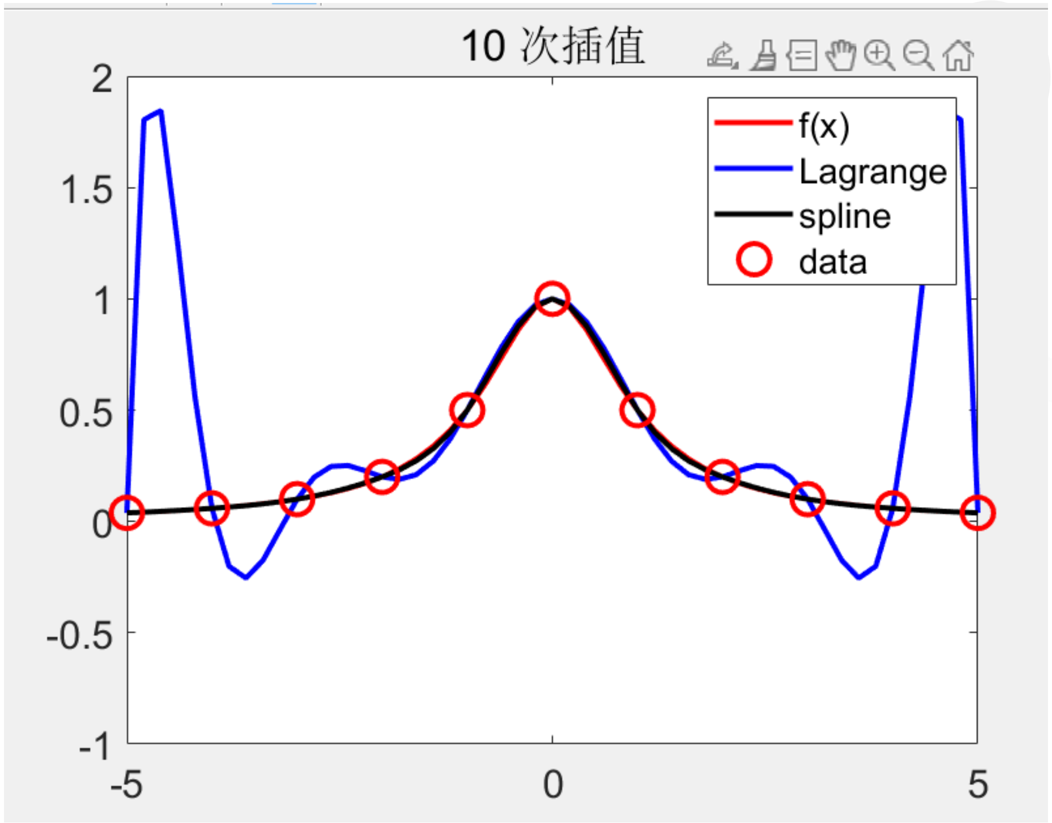
例：函数 $f(x)$ 定义在 $[27.7, 30]$ 上，插值节点及函数值如下，试求三次样条插值多项式 $S(x)$，满足边界条件 $S'(27.7)=3.0$, $S'(30)=-4.0$。

x	27.7	28	29	30
$f(x)$	4.1	4.3	4.1	3.0

Demo_7_3_4_Interp_spline.m

7.6 三次样条插值

例：函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，插值区间 [-5, 5]，取 11 个等距节点，试同时画出 10 次插值多项式 $L_{10}(x)$ 与三次样条插值多项式 $S(x)$ 的函数图形。



Demo_7_3_5_Interp_spline.m

- Q & A
- 谢谢