南京大學 NANJING UNIVERSITY
工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

解线性代数方程组的迭代法

温丹苹

邮箱：dpwen@nju.edu.cn

办公室：工管院协鑫楼306

解线性代数方程组的迭代法

解线性代数方程组的迭代法

◆ 对于**阶数很高且系数矩阵稀疏**的线性代数方程组，迭代法将具有明显的优势。

◆ 迭代法是用**某种极限过程去逐步地逼近准确解**，从而求出方程组具有指定精确度的近似解的方法。

* 直接法运算量 $O(n^3)$，随着矩阵规模的增大，运算量也随之**快速增长**。
* 对于大规模线性方程组，特别是稀疏方程组，当前的首选方法是**迭代方法**。

在矩阵中，若数值为0的元素数目远远多于非0元素的数目，并且非0元素分布没有规律时，则称该矩阵为**稀疏矩阵**。

1.1 迭代法基本思想

$$\boxed{Ax = b}, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ 非奇异}$$

给定一个初始值 $x^{(0)}$, 通过 一定的迭代格式 生成一个迭代序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, 使得

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x_* \triangleq A^{-1}b}$$

◆ **目前常用的两类迭代法:**

1. **定常迭代法**: 如 Jacobi, Gauss-Seidel, SOR 等.
2. **子空间迭代法**: 如 CG(共轭梯度法), MINRES(极小残差法), GMRES(广义极小残差法), BiCGStab(稳定双共轭梯度法)等.

1.2 向量序列与矩阵序列的收敛性

定义 (向量序列的收敛) 设 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量序列. 如果存在向量 $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\intercal \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

其中 $x_i^{(k)}$ 表示 $x^{(k)}$ 的第 i 个分量. 则称 $\{x^{(k)}\}$ (按分量) 收敛 到 x, 记为

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x.$$

我们称 x 为序列 $\{x^{(k)}\}$ 的 极限.

按坐标收敛或者按元素收敛

1.2 向量序列与矩阵序列的收敛性

定义 (矩阵序列的收敛) 设 $\left\{A^{(k)} = \left[a_{ij}^{(k)}\right]\right\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的一个矩阵序列. 如果存在矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

则称 $A^{(k)}$ 收敛到 A, 记为

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A.$$

我们称 A 为 $A^{(k)}$ 的 极限.

按坐标收敛或者按元素收敛

例 设 $0<|a|<1$, 考虑矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$, 其中

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^k, \quad k=1,2,\ldots.$$

易知当 $k\to\infty$ 时, 有

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◆收敛性定理

定理 设向量序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, 矩阵序列 $\left\{A^{(k)} = \left[a_{ij}^{(k)}\right]\right\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, 则

(1) $\boxed{\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0}$, 其中 $\|\cdot\|$ 为任一向量范数;

(2) $\boxed{\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|A^{(k)} - A\| = 0}$, 其中 $\|\cdot\|$ 为任一矩阵范数;

◆ 该定理将向量（矩阵）序列的收敛性转化为数列的收敛性.

◆两种特殊情形

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \left\| x^{(k)} \right\| = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \left\| A^{(k)} \right\| = 0$$

◆ 更多判别方法

定理 设矩阵序列 $\left\{A^{(k)}=\left[a_{ij}^{(k)}\right]\right\}_{k=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}^{n\times n}$, 则

$$\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=0\Longleftrightarrow\lim_{k\to\infty}A^{(k)}x=0,\quad\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

定理 设 $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 若存在矩阵范数使得 $\|B\|<1$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}B^k=0$.

定理 设 $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}B^k=0$ 当且仅当 $\rho(B)<1$.

推论 设 $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}B^k=0$ 的充要条件是存在某个矩阵范数 $\|\cdot\|$, 使得 $\|B\|<1$.

1.3 构造迭代法

◆ 两种迭代法：

1. **定常迭代法**：每一步的迭代格式是不变

2. **非定常迭代法**：迭代格式是可变的，收敛性分析较复杂

1.3.1 定常迭代法

◆ 基本思想

* 直接求解 $Ax = b$ 比较困难, 我们可以**求解一个近似线性方程组 $Mx = b$**, 其中 M 是 A 在某种意义下的近似.

1.3.1 定常迭代法

◆ 迭代过程

记 $Mx = b$ 的解为 $x^{(1)}$, 与原方程的解 $x_* = A^{-1}b$ 之间的误差满足

$$A\left(x_* - x^{(1)}\right) = b - Ax^{(1)}.$$

如果 $x^{(1)}$ 已经满足精度要求, 则可以停止计算, 否则需要 修正.

1.3.1 定常迭代法

记 $\Delta x \triangleq x_* - x^{(1)}$, 则 Δx 满足方程

$$A\Delta x = b - Ax^{(1)}.$$

由于直接求解比较困难, 因此我们还是求解近似方程

$$\boxed{M\Delta x = b - Ax^{(1)}}$$

得到一个近似的修正量 $\tilde{\Delta}x$. 于是修正后的近似解为

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \tilde{\Delta}x = x^{(1)} + M^{-1}(b - Ax^{(1)}).$$

如果 $x^{(2)}$ 已经满足精度要求, 则停止计算, 否则 继续按以上的方式进行修正.

1.3.1 定常迭代法

不断重复以上步骤，于是，我们就得到一个向量序列

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, , x^{(k)}, \ldots.$$

它们都是真解 x_* 的近似值，且满足下面的递推关系

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}(b - Ax^{(k)})}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

这就构成了一个迭代方法.

由于每次迭代的格式是一样的，因此称为 **定常迭代法**.

◆ 好的迭代法？

1. 以 M 为系数矩阵的线性方程组必须比原线性方程组 **更容易求解**
2. M 应该是 A 的一个很好的近似: **迭代序列 $\{x_k\}$ 快速收敛**

◆ 基于矩阵分裂的迭代法

* 目前一类比较常用的**定常迭代法是基于矩阵分裂的迭代法**，如 Jacobi 方法，Gauss-Seidel 方法，SOR (Successive Over-Relaxation, 超松弛) 方法等.

定义 (矩阵分裂 Matrix Splitting) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 非奇异，我们称

$$A = M - N$$

为 A 的一个矩阵分裂，其中 M 非奇异.

◆ 基于矩阵分裂的迭代过程

给定一个矩阵分裂, 则原方程组 $Ax = b$ 就等价于 $\boxed{Mx = Nx + b}$.

于是我们就可以构造出以下的迭代格式

$$\boxed{Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

或

$$\boxed{x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \triangleq Bx^{(k)} + f}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

其中 $B \triangleq M^{-1}N$ 称为 **迭代矩阵**.

注：$B = M^{-1}N = M^{-1}(M - A) = I - M^{-1}A$

* 这就是基于矩阵分裂的迭代方法，选取不同的 M，就得到不同的迭代方法.

◆迭代法的收敛性

定义 对任意初始向量$x^{(0)}$,设$\{x^{(k)}\}$ 是由迭代方法$x^{(k+1)}=M^{-1}Nx^{(k)}+M^{-1}b=Bx^{(k)}+f$生成的向量序列，如果$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$存在，则称迭代方法$\boldsymbol{x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f}$**收敛**，否则就称为 **发散**.

引理 设迭代序列$\{x^{(k)}\}$收敛，且$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=x_*$,**则**$x_*$一定**是原方程的真解。**

定理 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则对 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上任何一种矩阵范数 $\|\cdot\|$，都有

$$\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\|\boldsymbol{A}\|$$

证 设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，取与矩阵范数 $\|\cdot\|$ 相容的向量范数 $\|\cdot\|_V$，则由 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，可得

$$|\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|_V=\|\lambda\boldsymbol{x}\|_V=\|\boldsymbol{Ax}\|_V\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{x}\|_V$$

因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，所以

$$|\lambda|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|$$

对 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值成立，从而 $\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\|\boldsymbol{A}\|$. 证毕

◆ 定常迭代法基本收敛性定理

定理 对任意初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$，迭代方法$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$收敛的充要条件是方阵$\boldsymbol{B}$的谱半径$\rho(\boldsymbol{B}) < 1$。

◆ 充分条件

定理 若存在算子范数使得 $\|B\| < 1$，则迭代方法$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$收敛.

- 由于计算 $\rho(B)$ 通常比较复杂, 而 $\|B\|_1$, $\|B\|_\infty$ 相对比较容易计算, 因此在判别迭代方法收敛性时, 可以先验算一下迭代矩阵的 1-范数或 ∞-范数是否小于 1.
- 上述定理中的结论是充分条件, 但不是必要条件, 因此判断一个迭代方法不收敛仍然需要使用基本收敛定理.

例 讨论迭代方法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 的收敛性, 其中 $B = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$.

解. 由于 B 是下三角矩阵, 因此其特征值分别为 $\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = 0.8$.

所以 $\rho(B) = 0.9 < 1$. 故迭代方法收敛.

◆ 误差估计

定理 若存在算子范数使得 $q \triangleq \|B\| < 1$, 则

(1) $\|x^{(k)} - x_*\| \le q^k \|x^{(0)} - x_*\|$;

(2) $\|x^{(k)} - x_*\| \le \dfrac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$;

(3) $\|x^{(k)} - x_*\| \le \dfrac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$.

1.3.2 迭代法的收敛性

◆ 误差估计（**证明**）

（1）迭代误差$\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^*$

$$= \left(Bx^{(k-1)} + f\right) - (Bx^* + f) = B(x^{(k-1)} - x^*)$$

（2）由（1）知，$x^{(k)} - x^* = B(x^{(k-1)} - x^*)$，因此，$\boldsymbol{\|x^{(k+1)} - x^*\| \le q\|x^{(k)} - x^*\|}$

由$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$知，$x^{(k+1)} - x^{(k)} = B\left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right)$

因此，$\boldsymbol{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \le q\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}$

因为$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \|x^* - x^{(k)} - (x^* - x^{(k+1)})\|$

$$\ge \|x^* - x^{(k)}\| - \|x^* - x^{(k+1)}\|$$

$$\ge (1-q)\|x^* - x^{(k)}\|$$

因此，$\|x^* - x^{(k)}\| \le \frac{1}{1-q}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \le \frac{q}{1-q}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$

（3）反复利用$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \le q\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$，可得

$$\|x^* - x^{(k)}\| \le \frac{q^k}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

1.3.3 迭代方法的收敛速度

第 k 步的误差为

$$\varepsilon^{(k)} \triangleq x^{(k)} - x_* = B^k(x^{(0)} - x_*) = B^k\varepsilon^{(0)}.$$

所以

$$\frac{\|\varepsilon^{(k)}\|}{\|\varepsilon^{(0)}\|} \leq \|B^k\|.$$

因此平均每次迭代后误差的压缩率为 $\|B^k\|^{1/k}$.

1.3.3 迭代方法的收敛速度

定义 基于矩阵分裂的定常迭代法的 平均收敛速度 定义为

$$R_k(B) \triangleq -\ln \|B^k\|^{\frac{1}{k}},$$

渐进收敛速度 定义为

$$R(B) \triangleq \lim_{k\to\infty} R_k(B) = -\ln \rho(B).$$

如果 $0 < \rho(B) < 1$, 则迭代方法 **线性** 收敛.

一般来说, $\rho(B)$ 越小, 迭代方法的收敛速度越快.

1.3.3 迭代方法的收敛速度

如果事先给定一个精度要求，比如要求相对误差满足 $\dfrac{\|x^{(k)}-x_*\|}{\|x^{(0)}-x_*\|}<\varepsilon$,

则可根据下面的公式估计所需迭代步数 k:

$$\|B^k\|<\varepsilon \Longrightarrow \ln\|B^k\|^{1/k} \le \frac{1}{k}\ln(\varepsilon) \Longrightarrow k \ge \frac{-\ln(\varepsilon)}{-\ln\|B^k\|^{1/k}} \approx \frac{-\ln(\varepsilon)}{R(B)}.$$

1.4.1 Jacobi 迭代法

1.4.2 Gauss-Seidel 迭代法

1.4.3 SOR 迭代法

$$A = D - L - U$$

1.4.1 Jacobi 迭代法

◆ 设有方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1,2,\dots,n),$ 记作 $Ax = b$。

A为非奇异阵且$a_{ij} \neq 0(i = 1,2,\dots,n)$. 将$A$分解为$A = D - L - U$，其中，

对角阵 $D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

严格下三角阵 $-L = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$

严格上三角阵 $-U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n,n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

1.4.1 Jacobi 迭代法

◆ 将第$i(i=1,2,\ldots,n)$个方程用a_{ii}去除再移项，得到等价方程组：

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right), i = 1,2,\ldots,n.$$

◆ 应用迭代法，给定初始迭代向量$x_i^{(0)}$，得到Jacobi迭代公式：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), i = 1,2,\ldots,n.$$

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}, i = 1,2,\ldots,n.$$

* 上式的左右两端分别为：向量$Dx^{(k+1)}$和向量$b+Lx^{(m)}+Ux^{(m)}$的第i个分量，因此，$Dx^{(k+1)} = b + (L+U)x^{(k)}$

1.4.1 Jacobi 迭代法

$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b = Bx^{(k)} + f$

$Dx^{(k+1)} = b + (L+U)x^{(k)}$

- 取 M = D, N = L + U
  - 可得 Jacobi 迭代法:

$$\boldsymbol{x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b \, , k = 0, 1, \ldots .}$$

  - 对应的迭代矩阵

$$\boldsymbol{J = D^{-1}(L + U)}$$

  - 分量形式 (便于理解与编程实现)

$$\boldsymbol{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} \, x_j^{(k)}\Big), i = 1, 2, \ldots, n.}$$

1.4.1 Jacobi 迭代法

算法 Jacobi 迭代

1: Given an initial guess $x^{(0)}$

2: **while** not converge **do** % 停机准则

3: **for** $i = 1$ to n **do**

4: $$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}$$

5: **end for**

6: **end while**

Jacobi 迭代中 $x_i^{(k+1)}$ 的更新顺序与 i 无关, 因此非常适合并行计算.

在编程实现该算法时, "停机准则" 一般是要求相对残量满足一定的精度, 即

$$\frac{\|b - Ax^{(k)}\|}{\|b - Ax^{(0)}\|} < \mathrm{tol},$$

其中 tol 是一个事前给定的精度要求, 如 10^{-6} 或 10^{-8} 等.

1.4.2 Gauss-Seidel (G-S) 迭代法

◆ 在计算机上用该法求方程组$Ax=b$的解时，$\boldsymbol{x}^{(k)}$的分量必须保存到$\boldsymbol{x}^{(k+1)}$的分量全部算出之后才不再需要，因此 雅可比迭代法又称为**整体迭代法**。

◆ **每算出$\boldsymbol{x}^{(k+1)}$的一个分量便在其右端立即用新算出的分量代替$\boldsymbol{x}^{(k)}$的对应分量**，则得另一种迭代公式

例：

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(m)} - a_{13}x_3^{(m)}\right), \\ x_2^{(m+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - \boxed{a_{21}x_1^{(m+1)}} - a_{23}x_3^{(m)}\right), \\ x_3^{(m+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - \boxed{a_{31}x_1^{(m+1)} - a_{32}x_2^{(m+1)}}\right). \end{cases}$$

◆ 对于n阶方程组$Ax=b$,其迭代格式为

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}\,x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}\,x_j^{(k)}\right),i=1,2,\ldots,n.$$

➢ 在给定初始近似向量$x^{(0)}$后，用上述迭代公式求线性方程组$Ax=b$解的方法称为**高斯-赛德尔迭代法**，简称**G-S迭代法**。

➢ 利用A的分解式$A=D-L-U$，
则**G–S迭代格式**可用矩阵和向量表示为

$$Dx^{(k+1)}=b+Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}$$

即：$x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b$

1.4.2 Gauss-Seidel (G-S) 迭代法

$G-S$迭代法矩阵形式：

$x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b$与Jacobi 迭代法的矩阵形式类似，即：

$$x^{(k+1)}=B_G x^{(k)}+f_G$$

其中，$B_G=(D-L)^{-1}U$称为高斯-赛德尔迭代法的迭代矩阵，$f_G=(D-L)^{-1}b$。

1.4.2 Gauss-Seidel (G-S) 迭代法

取 M = D − L, N = U

总结

- 可得 G-S 迭代法

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$$

- 对应的迭代矩阵

$$B_G = (D-L)^{-1}U$$

- 分量形式

$$Dx^{(k+1)} = b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)},$$

即 $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right), i = 1, 2, \ldots, n.$

1.4.2 Gauss-Seidel (G-S) 迭代法

算法 Gauss-Seidel 迭代法

1: Given an initial guess $x^{(0)}$
2: **while** not converge **do**
3: **for** $i = 1$ to n **do**
4: $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$
5: **end for**
6: **end while**

* **G-S 迭代的优点:** 充分利用了已经获得的最新数据, 有望获得更快的收敛速度.

例 用雅可比迭代法和高斯-赛德尔迭代法求解方程组

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

解： 两种方法都取初始近似向量 $\vec{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$

方法一， 雅可比迭代法的迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)}=\dfrac{1}{9}\left(7+x_2^{(m)}+x_3^{(m)}\right), \\ x_2^{(m+1)}=\dfrac{1}{8}\left(7+x_1^{(m)}\right), \qquad m=0,1,2,\cdots \\ x_3^{(m+1)}=\dfrac{1}{9}\left(8+x_1^{(m)}\right). \end{cases}$$

解（续）：由上述公式逐次迭代得近似解如下表

m	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(m)}$	0	0.7778	0.9738	0.9942	0.9993	0.9998
$x_2^{(m)}$	0	0.8750	0.9722	0.9967	0.9993	0.9999
$x_3^{(m)}$	0	0.8889	0.9753	0.9971	0.9999	0.9999

解（续）：方法二，高斯-赛德尔迭代法的迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = \dfrac{1}{9}\left(7 + x_2^{(m)} + x_3^{(m)}\right), \\ x_2^{(m+1)} = \dfrac{1}{8}\left(7 + x_1^{(m+1)}\right), \\ x_3^{(m+1)} = \dfrac{1}{9}\left(8 + x_1^{(m+1)}\right). \end{cases} \qquad m = 0,1,2,\cdots$$

m	0	1	2	3	4
$x_1^{(m)}$	0	0.7778	0.9942	0.9998	1.0000
$x_2^{(m)}$	0	0.9722	0.9993	1.0000	1.0000
$x_3^{(m)}$	0	0.9753	0.9994	1.0000	1.0000

解（续）：例子的方程组的精确解为

$$x^{*} = (1,1,1)^{T}$$

由两表可以看到，高斯-赛德尔迭代法的收敛速度快于雅可比迭代法。这个结论在两种迭代法都收敛时，对一般情形也成立。

1.4.3 逐次超松弛(SOR) 迭代法

◆ 对高斯-赛德尔迭代法进一步改进，可得**逐次超松弛迭代法（Successive Over Relaxation Method）**，简称SOR方法。

◆ 基本思想

将 G-S 迭代法中的**第 k + 1 步近似解与第 k 步近似解做一个加权平均**, 从而给出一个更好的近似解.

1.4.3 逐次超松弛(SOR) 迭代法

◆ 假设方程组$Ax = b$的系数矩阵A的主对角元$a_{ii} \neq 0(i = 1,2,\ldots,n)$。若第$k$次迭代已经完成，记第$k$次迭代的第$i$个分量为$\boldsymbol{x_i^{(k)}}$；第$k+1$次向量迭代$\boldsymbol{x_i^{(k+1)}}$的前$i-1$个分量已算出，由G-S迭代法算出的第$i$个分量记为$\boldsymbol{\hat{x}_i^{(k+1)}}$，则有

$$\hat{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right),$$

1.4.3 逐次超松弛(SOR) 迭代法

◆ 通过引进加权因子ω，将$x_i^{(k)}$和$\hat{x}_i^{(k+1)}$进行加权组合作为第$k+1$次迭代$x_i^{(k+1)}$的第i个分量，则得到**松弛迭代法迭代公式**：

$$
\begin{aligned}
x_i^{(k+1)} &= (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\hat{x}_i^{(k+1)} \\
&= x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

$$i = 1,2,\ldots,n.$$

◆ 上述迭代公式求方程组$Ax=b$解的方法称为：**带有松弛因子ω的松弛迭代法。**

1.4.3 逐次超松弛(SOR) 迭代法

- 当$\omega > 1$时，称为超松弛（SOR）迭代法
- 当$\omega < 1$时，称为低松弛迭代法
- 当$\omega = 1$时，SOR 即为 G–S 方法

$$
\begin{aligned}
x_i^{(k+1)} &= (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\hat{x}_i^{(k+1)} \\
&= (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

◆矩阵和向量表示

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k)} + \omega\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{(k)}\right)$$

即：

$$Dx^{(k+1)} = (1-\omega)Dx^{(k)} + \omega Lx^{(k+1)} + \omega Ux^{(k+1)} + \omega b$$

1.4.3 逐次超松弛(SOR) 迭代法

$$x^{(k+1)} = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]x^{(k)} + \omega(D-\omega L)^{-1}b$$

因此，可得SOR方法的矩阵形式

$$x^{(k+1)} = B_\omega x^{(k)} + f_\omega$$

其中，$B_\omega = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$，称为SOR方法的迭代矩阵，$f_\omega = \omega(D-\omega L)^{-1}$。

◆ SOR 方法曾经在很长一段时间内是科学计算中求解线性方程组的首选方法.

总结

◆ SOR 的迭代矩阵

$$B_\omega = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$$

◆ 对应的矩阵分裂

$$M = \frac{1}{\omega}D - L, \quad N = \frac{1-\omega}{\omega}D + U$$

◆ 分量形式为:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{(k)}\right)$$

$$= x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\,x_j^{(k)}\right)$$

1.4.3 逐次超松弛(SOR) 迭代法

算法 求解线性方程组的 SOR 迭代方法

Given an initial guess $x^{(0)}$ and parameter ω
while not converge **do**
    for $i = 1$ to n **do**
$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$
    end for
end while

* SOR方法最大的优点是引入了松弛参数 ω, 增加了算法的自由度, 同时通过选取适当的 ω 可以大大提高方法的收敛速度.

* 如何确定 SOR 的最优松弛因子是一件非常困难的事!

松弛因子ω一般用**试错法选择**，经验表明ω =1.3左右较好。(1.4 ≤ ω ≤ 1.6)

1.4.3 逐次超松弛(SOR) 迭代法

例 分别用 Jacobi, G-S 和 SOR($\omega=1.1$) 迭代方法求解线性方程组 $Ax=b$, 其中

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

初始向量设为 $x^{(0)}=[0,0,0]^\intercal$, 迭代过程中保留小数点后四位.

Demo_6_1_Jacobi_G_S_SOR.m

1.5 三种经典迭代法的收敛性分析

◆ **基本准则：**

1. 三种经典迭代法收敛的充要条件：

谱半径$\boldsymbol{\rho(B) < 1}$

2. 三种经典迭代法收敛的充分条件：

范数$\boldsymbol{\|B\| < 1}$

1.5.2 SOR的收敛性

◆ SOR 收敛的必要条件

定理 若 SOR 迭代方法收敛, 则 $0 < \omega < 2$.

◆ 对角占优情形: 充分条件

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 若 A 严格对角占优 (或不可约弱对角占优) 且 $0 < \omega \le 1$, 则 SOR 收敛.

◆ 对称正定情形: 充要条件

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定, 则 SOR 迭代方法收敛的充要条件是 $0 < \omega < 2$.

1.5.2 Jacobi 和 G-S 的收敛性

例 考虑线性方程组 $Ax = b$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$. 试给出 Jacobi, G-S 和 SOR 收敛的充要条件.

- Q & A
- 谢谢