非线性方程的数值解法

温丹苹
邮箱：dpwen@nju.edu.cn
办公室：工管院协鑫楼306

2.3 牛顿法

2.4 弦截法

2.5 小结

2.3.1 牛顿法基本思想与迭代格式

$$f(x)=0$$

基本思想：线性化

将$f(x)$在x_k处Taylor展开可得

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\varepsilon)}{2!}(x-x_k)^2$$

忽略二次项，可得$f(x)\approx P(x)$，其中

$$P(x)\triangleq f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)。$$

用$P(x)$的零点来近似$f(x)$的零点，并将其记为x_{k+1}。

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

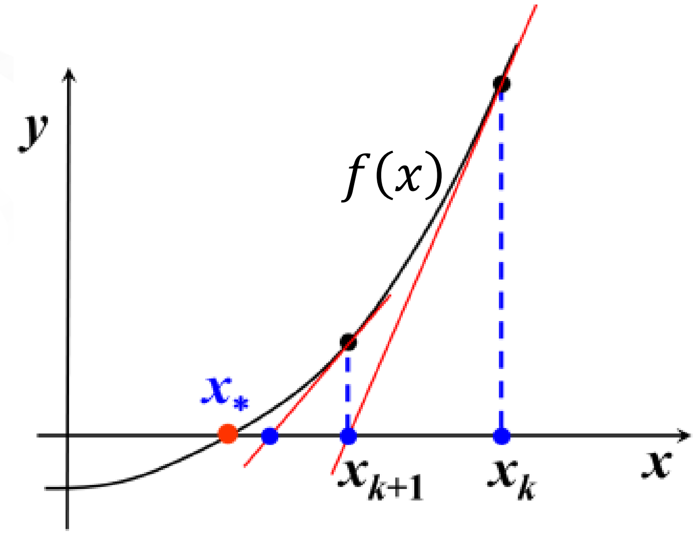
◆ 牛顿法又称为切线法

- 方程$f(x)=0$的根x_*解释为$y=f(x)$与x轴的交点的横坐标。

- 设x_k是根x_*的某个近似值，过曲线$y=f(x)$上的横坐标为x_k的点P_k引切线，并将该切线与x轴的交点的横坐标x_{k+1}作为x_*新的近似值。

- 切线方程为$y=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$。求得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



2.3.3 牛顿法伪代码

算法 Newton 法

给定迭代初值 x_0, 精度要求 ε 和最大迭代步数 IterMax
if $|f(x_0)| < \varepsilon$, **then**
    输出近似解 x_0, 停止迭代
end if
for $k = 1$ to IterMax **do**
    计算 $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
    if $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ 或 $|f(x_1)| < \varepsilon$, **then**
        输出近似解 x_1, 停止迭代   % 算法收敛
    end if
    $x_0 = x_1$
end for

◆迭代过程的**收敛速度**：指在接近收敛的过程中迭代误差的下降速度。

定理 对于迭代过程$x_{k+1} = \varphi(xk)$，如果$\varphi^{(p)}(x)$在所求根x_*邻近连续，且

$$\begin{cases} \varphi'(x_*) = \varphi''(x_*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x_*) = 0, \\ \varphi^{(p)}(x_*) \neq 0, \end{cases}$$

则该迭代过程在点x_*邻近是p阶收敛的。

* 当$x \in [a, b]$时，$\varphi'(x) \neq 0$，则该迭代过程只可能是线性的。

定理 设 x_* 是 $f(x)$ 的零点, 且 $f'(x_*) \neq 0$, 则 Newton 法 **至少二阶局部收敛**:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x_*}{(x_k - x_*)^2} = \frac{\varphi''(x_*)}{2} = \frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}.$$

2.3.4 牛顿法收敛性

牛顿法迭代公式： $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

迭代函数： $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

计算可得： $\varphi'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$　　$\varphi''(x) = \dfrac{f''(x)}{f'(x)}$

- 假设x_*是$f(x)$的一个单根，则$f(x_*)=0$，$f'(x_*) \neq 0$，则$\varphi'(x_*)=0$，因此，$\varphi''(x_*) \neq 0$，即**牛顿法在根x_*的邻近是平方收敛的**。

* **一般来说 Newton 法只是局部收敛**，如果初值离真解太远可能就不收敛，因此 初值的选取很重要但也比较困难. 但是，对于计算平方根，Newton 法是全局收敛的，因此是安全的.

例 编写程序，用 Newton 法求 $f(x)=xe^x-1$ 的零点. Demo_3_1_NLS_Newton.m

解. 迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_ke^{x_k}-1}{e^{x_k}(x_k+1)}.$$

取初值 $x_0=0.5$, 迭代结果见下表.

k	x	$\lvert f(x)\rvert$
	0.50000000	1.76e-01
1	0.57102044	1.07e-02
2	0.56715557	3.39e-05
3	0.56714329	3.41e-10
4	0.56714329	2.22e-16

从表中数据可以看出, Newton 法迭代 4 步就达到机器精度了, 收敛速度非常快. □

作业：

用Newton法求方程 $f(x) = x^2 - 115 = 0$ 的解。

上机作业：

用Newton法求方程 $f(x)=e^{(2x-1)}(2-x)+1=0$的解。

2.3.6 牛顿法

例　用牛顿法求方程$x^3-x-1=0$，在$x=1.5$处附近的一个根x_*。

解　1. 若初始迭代值$x_0=1.5$，用牛顿公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-x_k-1}{3x_k^2-1}$$

收敛

计算得：$x_1=1.34783$，$x_2=1.32520$，$x_3=1.32470$。

2. 若初始迭代值$x_0=0.6$，用牛顿公式，计算得

$x_1=17.9$。

发散

2.3.5 牛顿法优缺点

优点：

（对于单根）收敛速度快（至少二阶局部收敛），是目前求解非线性方程组的主要方法。

缺点：

1. 对**重根收敛速度较慢**，只有线性收敛；
2. 对**初值**的选取很敏感，要求初值相当接近真解；
3. 每一次迭代都需要**计算导数**，难度和工作量都可能会比较大。

2.3.6 牛顿下山法

下山法基本思想：

为保证全局收敛，要求每一步迭代满足**下降条件**：

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$$

即保持函数的绝对值是下降的。

具体做法：加入一个下山因子λ，与前一步近似值x_k的适当加权平均作为新的改进值$x_{k+1}=\lambda\bar{x}_{k+1}+(1-\lambda)\, x_k$：

$$x_{k+1} = x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

下山因子λ的取法:

从 λ =1开始, 逐次减半, 直到满足下降条件为止。

◆ 解决重根问题

- 牛顿法具有平方收敛速度是指单根时的情况，当不是单根时，就没有平方收敛速度，为了得到平方收敛速度，可对**牛顿法进行修正。**

- 设x^*为方程 $f(x)=0$ 的 m 重根（$m\geq 2$），则有$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$，其中$g(x^*)\neq 0$，此时有

$$f(x^*)=f'^{(x^*)}=\cdots=f^{m-1}(x^*)=0, f^m(x^*)\neq 0$$

2.3.7 牛顿法重根情形

◆ 解决重根问题

- 当 m 已知时，由于x^*是方程$f(x)^{1/m}=0$的单根，对此方程应用牛顿迭代公式，有

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},k=0,1,2,\ldots$$

- 当 m 未知时，令$u(x)=f(x)/f'(x)$，则 x^*是方程$u(x)=0$的单根。对$u(x)$用牛顿法进行求解，其迭代公式如下

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f'(x_k)f(x_k)}{f'(x_k)^2-f(x_k)f''(x_k)},k=0,1,2,\ldots$$

◆ 解决重根问题-例子

例 已知$\sqrt{2}$是方程$x^4-4x^2+4=0$的多重根，分别用牛顿法和求重根的牛顿法求其近似根。

- 作业（以1.5作为初值，采用三种方法，包括牛顿法、已知其是二重根的牛顿法、不知道其是二重根的牛顿法；每个方法迭代5次，记录每一次迭代得到的近似值，并说明三种方法的表现）。

* 编写程序, 分别用以上三种方法计算。

Demo_3_2_NLS_Newton.m

2.4.1 弦截法基本思想

目的： 避免计算导数，并且尽可能地保持较高的收敛性(即超线性收敛).

弦截法 也称割线法，主要思想是**用差商代替微商**，即

$$f'(x_k) \approx f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

代入牛顿法即可得**弦截法迭代格式：**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})} f(x_k),\ k=1,2,\cdots$$

* 割线法需要提供**两个迭代初始值**。

定理 设 x_* 是 $f(x)$ 的零点，$f(x)$ 在 x_* 的某邻域 $U(x_*,\delta)$ 内二阶连续可导，且 $f'(x)\neq 0$. 若初值 $x_0,x_1\in U(x_*,\delta)$，则当 δ 充分小时，割线法具有 p 阶收敛性，其中

$$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618,$$

即 p 是 $p^2-p-1=0$ 的一个根.

2.4.2 弦截法几何意义

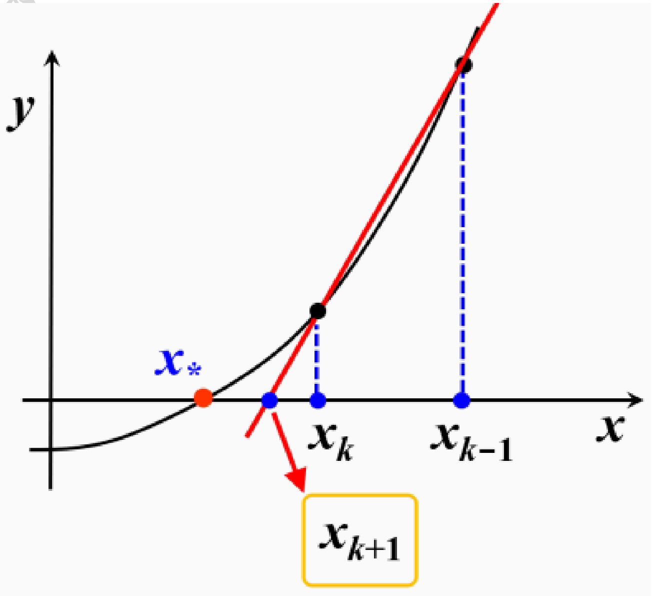
◆ 曲线$y = f(x)$上横坐标为x_k, x_{k-1}的点分别记作P_k, P_{k-1}，弦线P_kP_{k-1}的斜率

等于差商值$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$，其方程为：

$$f(x_k) + \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x - x_{k-1}) = 0。$$

◆ x_{k+1}实际是弦线P_kP_{k-1}与x轴的交点。

◆ 因此，成为弦截法。



2.4.3 弦截法优缺点

弦截法： 常用于函数的导数较复杂或函数仅在区间上连续的情形。

优点：

不需要求函数的导数；

两个初值容易给出。

缺点： 收敛阶只有1.618，比牛顿法的收敛阶低。

2.5 小结

- ◆ 理解方程有根的判别定理；
- ◆ 掌握二分法基本原理和算法流程;
- ◆ 掌握理解迭代法的基本思想和收敛条件；
- ◆ 掌握牛顿法的建立及几何意义，了解牛顿法的收敛性；

- Q & A
- 谢谢