2.3 解的最优性检验

- 判断是否为最优解，关键是看检验数；
- 由于数字格为基变量，其检验数始终为 0；
- 故只要看空格的检验数，如何求此检验数？
  - 闭回路法 (Cycle Method)
  - 对偶变量法 (Dual Variable Method)
- 运输问题的目标函数要求为最小，即当检验数 $\sigma_{ij} \geq 0$时为最优。

1. 闭回路法 Cycle Method

- 在初始解上，对每个空格找一条闭回路
- 以某个空格为起点，用水平或垂直线向前划，每碰到一个数字格转90度，继续前进，直接回到起始空格为止。
- 从每一空格出发一定存在和可以找到唯一的闭回路。
- 可能有时要跳过某个数字格

2.3 解的最优性检验

闭回路法

检验数

	B1	B2	B3	B4	产量
A1	(1) [3]	[11]	4 (-1) [3]	3 [10]	7
A2	3 (-1) [1]	[9]	1 (+1) [2]	[8]	4
A3	[7]	6 [4]	[10]	3 [5]	9
销量	3	6	5	6	

2.3 解的最优性检验

闭回路法

	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3 (1)	11 (2)	3 4	10 (-1) 3	7
A2	1 3	9	2 1	8	4
A3	7	4 6 (-1)	10	5 3 (+1)	9
销量	3	6	5	6	

2.3 解的最优性检验

闭回路法

	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3 (1)	11 (2)	3 4	10 3	7
A2	1 3	9	2 1	8 (-1)	4
A3	7	4 6	10 (12)	5 3	9
销量	3	6	5	6	

闭回路法

	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3 (1)	11 (2)	3 4 (-1)	10 3 (+1)	7
A2	1 3 (-1)	9	2 1 (+1)	8 (-1)	4
A3	7 (10) (+1)	4 6	10 (12)	5 3 (-1)	9
销量	3	6	5	6	

闭回路法

	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3 (1)	11 (2)	3 4 (+1)	10 3 (-1)	7
A2	1 3	9 (1)	2 1 (-1)	8 (-1)	4
A3	7 (10)	4 6 (-1)	10 (12)	5 3 (+1)	9
销量	3	6	5	6	

2.3 解的最优性检验

闭回路法: 空格检验数有负数，未达最优

	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3 (1)	11 (2)	3 4	10 3	7
A2	1 3	9 (1)	2 1	8 (-1)	4
A3	7 (12)	4 6	10 (12)	5 3	9
销量	3	6	5	6	

运输问题的对偶问题：

设 $u_i, v_j, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n,$ 为运输问题的对偶变量，则运输问题的对偶问题如下：

$$\max\ w=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j$$

$$\text{s.t.}\quad u_i+v_j\le c_{ij}(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$$

$$u_i,v_j\ \text{自由变量}$$

2. 对偶变量法(位势法)

- 检验数计算公式:

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

- 对基变量（数字格）有$\sigma_{ij} = 0$，共$m + n - 1$个
- 令$u_1 = 0$
- 从此$m + n - 1$个方程中可以解出u_i和v_j的值
- 由此u_i和v_j再来计算空格检验数的值σ_{ij}

位势法

From \ To	A	B	C	Supply	Dual u
D	(-1) 5	(0) 4	100 3	100	0
E	(2) 8	200 4	100 3	300	0
F	300 9	0 7	(-1) 5	300	3
Demand	300	200	200		
Dual v	6	4	3		

检验数计算公式：$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

闭回路调整法

- 确定进基变量
  - 检查非基变量x_{ij}的检验数σ_{ij}，按 $\min\{\sigma_{ij}|\sigma_{ij}<0\}=\sigma_{lk}$确定$x_{lk}$进基。
- 确定离基变量
  - 非基变量x_{lk}进基之后，能让它的运量增加多少呢？调整后它所在行和列的运量要保持**产销平衡**
  - **奇偶点：** 始点是奇点，依次奇偶相间标注；奇点标“+”，表示运量增加量；偶点标“–”，表示运量减少量。
  - **调整量：** 最小可减少的运量，即偶点运量的最小值。偶点运量的最小值所在格的基变量离基。

调整

To / From	A	B	C	供应量
D	(-10) 100 [5]	[4]	100 [3]	100
E	[8]	100 200 [4]	200 100 [3]	300
F	300 200 [9]	100 0 [7]	[5]	300
需求量	300	200	200	700

调整后

To / From	A	B	C	供应量
D	100 (5)	(4)	(3)	100
E	(8)	100 (4)	200 (3)	300
F	200 (9)	100 (7)	(5)	300
需求量	300	200	200	700

总成本：$100 \times 5 + 100 \times 4 + 200 \times 3 + 200 \times 9 + 100 \times 7 = 4000$

2.4 解的改进

重算检验数

From \ To	A	B	C	供应量
D	100 [5]	(1) [4]	(1) [3]	100
E	(2) [8]	100 [4]	200 [3]	300
F	200 [9]	100 [7]	(-1) [5]	300
需求量	300	200	200	

负数!!!
还要调整

闭回路和检验数:

DB: DB→FB→FA→DA→DB $4-7+9-5=1$

DC: DC→EC→EB→FB→FA→DA $3-3+4-7+9-5=1$

EA: EA→EB→FB→FA→EA $8-4+7-9=2$

FC: FC→EC→EB→FB→FC $5-3+4-7=-1$

第2次调整—最优

To / From	A	B	C	供应量
D	100 [5]	[4]	[3]	100
E	[8]	200 [4]	100 [3]	300
F	200 [9]	[7]	100 [5]	300
需求量	300	200	200	700

总成本：$100 \times 5 + 200 \times 4 + 100 \times 3 + 200 \times 9 + 100 \times 5 = 3900$

用位势法计算调整后的检验数

To / From	A	B	C	供应量	Dual u
D	100 [5]	(2) [4]	(2) [3]	100	0
E	(1) [8]	200 [4]	100 [3]	300	2
F	200 [9]	(1) [7]	100 [5]	300	4
需求量	300	200	200		
Dual v	5	2	1		

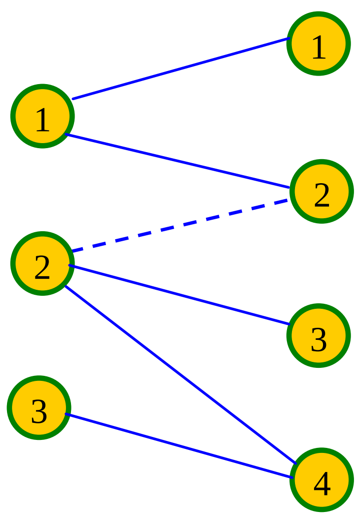
空格检验数计算公式：$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

所有空格检验数均非负，达到最优解！

2.4 表上作业法计算中的问题

1. 退化解

当一个基础可行解中$x_{ij} > 0$的基变量的个数小于$m+n-1$时，称这样的基础可行解为退化的。换言之，退化的基础可行解中至少有一个基变量是0。



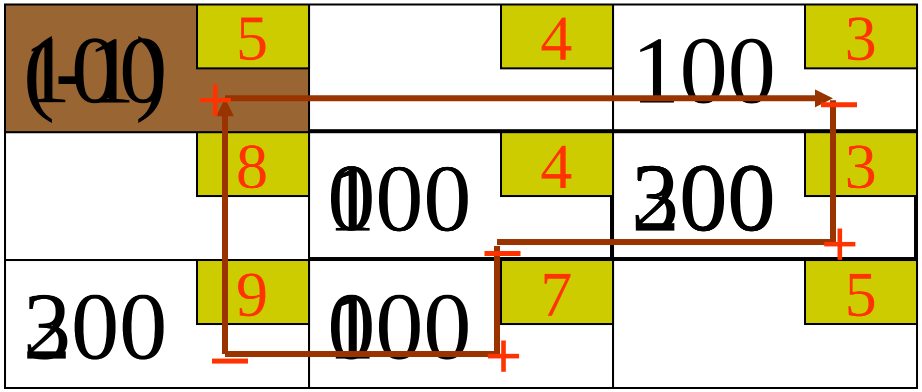
	1	2	3	4	
1	2	10	3	10	4	9	20
2	14	12	0	5	20	1	10	30
3	12	15	9	4	40	40
	10	10	20	50	

为了使基变量保持$m+n-1$个，又使基解满足供应地和需求地的运量约束，需要增加一个$x_{ij}=0$的基变量，这个基变量在网络图和运输表中不能形成闭回路。

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

1. 退化解

- 在用闭回路法调整时，在闭回路上出现两个和两个以上的具有(–)标记的相等的最小值
- 这时只能选择其中一个作为调入格。而经调整后，得到退化解。这时另一个数字格必须填入一个 0，表明它是基变量



2.4 表上作业法计算中的问题

2. 无穷多最优解

产销平衡的运输问题必定存在最优解。那么最优解是唯一最优解还是无穷多最优解?

加工厂 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	2		5		7
A_2	1			3	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

若某个非基变量(空格)的检验数为 0 时，该问题有无穷多最优解。

加工厂 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	0 (+)	2	5	2 (−)	7
A_2	3 (−)	2	1	1 (+)	4
A_3	9	6	12	3	9
销量	3	6	5	6	

$$\theta = \min(2,3) = 2$$

第三章 运输问题

3. 运输问题的进一步讨论

3.1 产销不平衡的运输问题

- 前面的解法，前提是总产量等于总销量。
- 然而，现实生活中的问题有很多却是产销不平衡的，能否解决？

产销不平衡的运输问题模型

<u>产大于销时约束条件</u>

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

<u>产小于销时约束条件</u>

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

3.1 产销不平衡的运输问题

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

- 若总产量大于总销量，就增加虚拟销地dummy destination，销量为产量的差额。
- 若总产量小于总销量，就增加虚拟产地dummy source，产量为销量的差额。
- 因为这些差额实际上不会运送，即就地存储或销售，所以假设它们的单位运价均为0

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij}$$

$$c_{i,n+1} = 0$$

$+x_{i,n+1}$ 松弛变量

产大于销:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

$=$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

例1

假设D工厂的产量现在是250

From \ To	A	B	C	Supply
D	5	4	3	100 250
E	8	4	3	300
F	9	7	5	300
Demand	300	200	200	700

产量大于销量150，就要增加一个虚拟销地

To / From	A	B	C	Dummy / Supply
D	5	4	3	0 / 250
E	8	4	3	0 / 300
F	9	7	5	0 / 300
Demand	300	200	200	150 / 850

虚拟销地的单位运价均为0，销量为150

3.1 产销不平衡的运输问题

例2. 石家庄北方研究院有一、二、三3个区。每年分别需要用煤3000、1000、2000吨，由山西A县、河北B县两处煤矿负责供应，价格、质量相同。供应能力分别为1500、4000吨，运价为：

销地 / 产地	一区	二区	三区	产量
山西A县	1.65	1.70	1.75	4000
河北B县	1.60	1.65	1.70	1500
需求量	3000	1000	2000	

由于需大于供，经院研究决定一区供应量可减少0~300吨，二区必须满足需求量，三区供应量不少于1700吨，试求总费用为最低的调运方案。

	一区	一区’	二区	三区	三区’	产量
山西A县	1.65	1.65	1.70	1.75	1.75	4000
河北B县	1.60	1.60	1.65	1.70	1.70	1500
假想生产点	M	0	M	M	0	500
需求量	2700	300	1000	1700	300	

3.1 产销不平衡的运输问题

例3. 有A、B、C三个化肥厂供应1、2、3、4四个地区的农用化肥。假设效果相同，有关数据如下表：

	1区	2区	3区	4区	产量
A	16	13	22	17	50
B	14	13	19	15	60
C	19	20	23	---	50
最低需要量	30	70	0	10	
最高需要量	50	70	30	不限	

试求总费用为最低的化肥调拨方案。

	1区′	1区″	2区	3区	4区′	4区″	产量
A	16	16	13	22	17	17	50
B	14	14	13	19	15	15	60
C	19	19	20	23	M	M	50
D	M	0	M	0	M	0	50
销量	30	20	70	30	10	50	

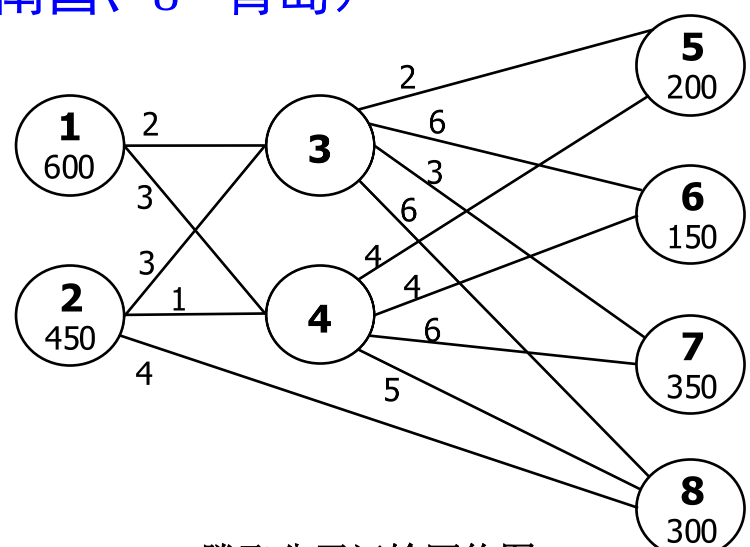
最低要求必须满足，因此把相应的虚设产地运费取为M，而最高要求与最低要求的差允许按需要安排，因此把相应的虚设产地运费取为0。对应4”的销量50是考虑问题本身适当取的数据，根据产销平衡要求确定D的产量为50。

3.2 转运问题

Transshipment Problem

- 产地与销地之间没有直达路线，需要中间转运。
- 某些产地既输出货物，也吸收一部分货物；某销地既吸收货物，又输出部分货物，即产地或销地也可以起中转站的作用，或者既是产地又是销地。
- 产地与销地虽然有直达路线，但直达运输的费用或运输距离分别比经过某些中转站还要高或远。

例：腾飞电子仪器公司在大连和广州有两个分厂生产同一种仪器，大连分厂每月生产450台，广州分厂每月生产600台。该公司在上海和天津有两个销售公司负责对南京、济南、南昌、青岛四个城市的仪器供应。另外因为大连距离青岛较近，公司同意大连分厂向青岛直接供货，运输费用如下图，单位是百元。问应该如何调运仪器，可使总运输费用最低？（图中 1- 广州、2 - 大连、3 - 上海、4 - 天津、5 - 南京、6 - 济南、7 - 南昌、8 - 青岛）



腾飞公司运输网络图

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

目标函数：

$$\min f = 2x_{13} + 3x_{14} + 3x_{23} + x_{24} + 4x_{28} + 2x_{35} + 6x_{36} + 3x_{37} + 6x_{38} + 4x_{45} + 4x_{46} + 6x_{47} + 5x_{48}$$

约束条件：

$s.t.\ x_{13} + x_{14} \le 600$ （广州分厂供应量限制）

$x_{23} + x_{24} + x_{28} \le 450$ （大连分厂供应量限制）

$-x_{13} - x_{23} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} = 0$ （上海销售公司，转运站）

$-x_{14} - x_{24} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} = 0$ （天津销售公司，转运站）

$x_{35} + x_{45} = 200$ （南京的销量）

$x_{36} + x_{46} = 150$ （济南的销量）

$x_{37} + x_{47} = 350$ （南昌的销量）

$x_{38} + x_{48} + x_{28} = 300$ （青岛的销量）

$x_{ij} \ge 0 \quad i,j = 1,2,3,4,5,6,7,8$

能否转化成一个等价的产销平衡运输问题，再用表上作业法求出最优调运方案？

3.2 转运问题

- 假定m个产地和n个销地都可以作为中间转运站，则产地、销地均有$m+n$个，则可得到扩大的运输问题。
- 产销平衡（总产量 = 总销量 = Q）
- 原产地在新表中的产量均加 Q
- 原销地在新表中的产量均为 Q
- 原销地在新表中的销量均加 Q
- 原产地在新表中的销量均为 Q
- 新表中对角线处运价为转运费用的负值

关于转运表的解释

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

- 因为从产地到销地不是直通，就要转运，这样中间经过的点既可以是产地又可以是销地；而这些地点之间两两都可以通过转运来到达，故每个地点都可以作为潜在产地和销地。
- 自己到自己没有转运费即为0；若有，则取负值表示更多的是就地存储以减少总运费。
- 通过每个地点的货物数量既包括该地点作为销地的需求量，也包括其作为产地的供应量。因为这一数量事先不知道，只好设一个上界，再在需求约束中加入松弛变量x_{ii}来平衡。
- 这个上界取总运量Q最方便，因为运量再大也不会超过此值。
- 每个转运地实际转运量为$Q - x_{ii}$。

关于转运表的解释

设有$\boldsymbol{m}$个产地$\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_m}$和$\boldsymbol{n}$个目的地$\boldsymbol{B_1, B_2, \ldots, B_n}$，都可以作为中间转运站使用，因此发送和接受货物的地点有$\boldsymbol{m+n}$个。

$\boldsymbol{a_i}$: 第$\boldsymbol{i}$个产地的产量；$\boldsymbol{b_j}$: 第$\boldsymbol{j}$个目的地的需求量

$\boldsymbol{x_{ij}}$: 第$\boldsymbol{i}$个产地运到第$\boldsymbol{j}$个目的地的货物量

$\boldsymbol{c_{ij}}$: 第$\boldsymbol{i}$个产地运到第$\boldsymbol{j}$个目的地的单位运价

$\boldsymbol{t_i}$: 第$\boldsymbol{i}$个地点转运货物的数量;

$\boldsymbol{c_i}$: 第$\boldsymbol{i}$个地点转运货物的单位费用

$$\min\ S = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m+n} c_i t_i$$

在四组等式约束条件两边均加上$\boldsymbol{Q}$

$$s.t.\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{i,i-1} + x_{i,i+1} + \ldots + x_{i,m+n} - t_i = a_i & (i = 1,2,\ldots,m) \\ x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{i,i-1} + x_{i,i+1} + \ldots + x_{i,m+n} - t_i = 0 & (i = m+1, m+2, \ldots, m+n) \\ x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{j-1,j} + x_{j+1,j} + \ldots + x_{m+n,j} - t_j = 0 & (j = 1,2,\ldots,m) \\ x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{j-1,j} + x_{j+1,j} + \ldots + x_{m+n,j} - t_j = b_j & (j = m+1, m+2, \ldots, m+n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

关于转运表的解释

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

$$\min\ S=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m+n}\sum_{j=1}^{m+n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m+n}c_i t_i$$

$$s.t.\begin{cases} x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{i,i-1}+x_{i,i+1}+\ldots+x_{i,m+n}\boxed{+Q-t_i}=Q+a_i\ (i=1,2,\ldots,m)\\ x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{i,i-1}+x_{i,i+1}+\ldots+x_{i,m+n}\boxed{+Q-t_i}=Q+0\ \ (i=m+1,m+2,\ldots,m+n)\\ x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{j-1,j}+x_{j+1,j}+\ldots+x_{m+n,j}\boxed{+Q-t_j}=Q+0\ \ (j=1,2,\ldots,m)\\ x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{j-1,j}+x_{j+1,j}+\ldots+x_{m+n,j}\boxed{+Q-t_j}=Q+b_j\ (j=m+1,m+2,\ldots,m+n)\\ x_{ij}\geq 0\ \ (i\neq j)\end{cases}$$

$$\min\ S=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m+n}\sum_{j=1}^{m+n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m+n}c_i t_i$$

令$\boldsymbol{x_{ii}=Q-t_i,\ x_{jj}=Q-t_j}$

$$s.t.\begin{cases} x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{i,i-1}+x_{i,i+1}+\ldots+x_{i,m+n}+x_{ii}=Q+a_i\ (i=1,2,\ldots,m)\\ x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{i,i-1}+x_{i,i+1}+\ldots+x_{i,m+n}+x_{ii}=Q+0\ \ (i=m+1,m+2,\ldots,m+n)\\ x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{j-1,j}+x_{j+1,j}+\ldots+x_{m+n,j}+x_{jj}=Q+0\ \ (j=1,2,\ldots,m)\\ x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{j-1,j}+x_{j+1,j}+\ldots+x_{m+n,j}+x_{jj}=Q+b_j\ (j=m+1,m+2,\ldots,m+n)\\ x_{ij}\geq 0\ \ (i\neq j)\end{cases}$$

关于转运表的解释

$$\min\ S=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m+n}\sum_{j=1}^{m+n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m+n}c_i(Q-x_{ii})=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m+n}\sum_{j=1}^{m+n}c_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{m+n}c_ix_{ii}+\sum_{i=1}^{m+n}c_iQ$$

$$=\sum_{i=1}^{m+n}\sum_{j=1}^{m+n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m+n}c_iQ$$

当 $i=j$ 时
$c_{ii}=-c_i$

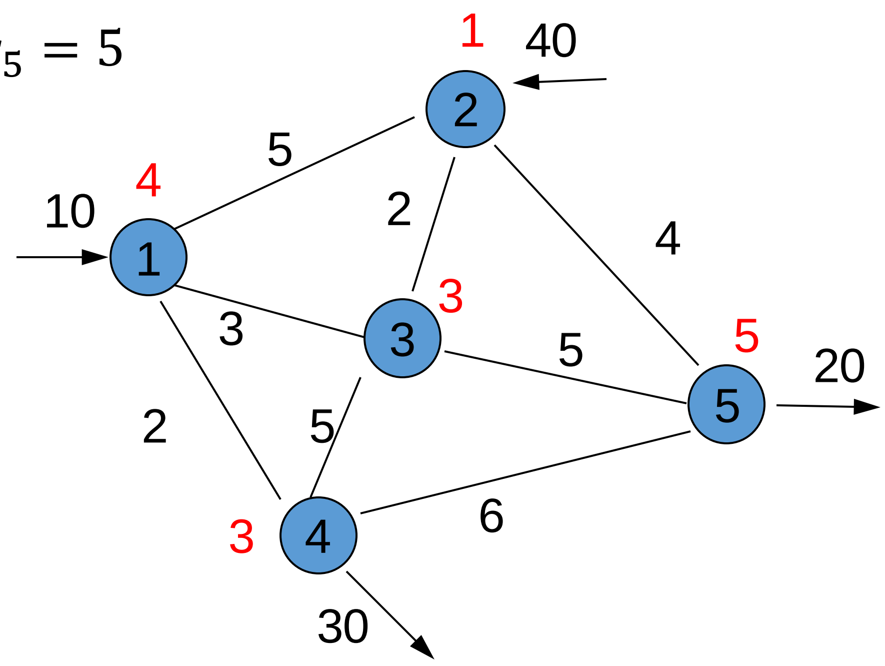
$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{m+n}x_{ij}=Q+a_i(i=1,2,\dots,m)\\ \sum_{j=1}^{m+n}x_{ij}=Q\ (i=m+1,m+2,\dots,m+n)\\ \sum_{i=1}^{m+n}x_{ij}=Q(j=1,2,\dots,m)\\ \sum_{i=1}^{m+n}x_{ij}=Q+b_j\ (j=m+1,m+2,\dots,m+n)\end{cases}$$

$$x_{ij}\geq 0(i,j=1,2,\dots,m+n)$$

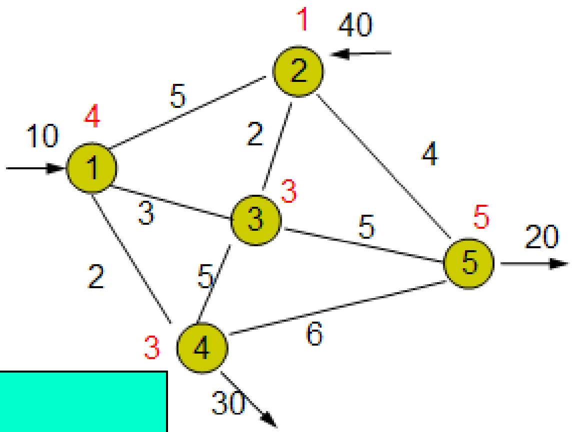
3.2 转运问题 — 例题

例：如图，有两个产地1、2，两个销地4、5，以及一个转运地3，已知

- $a_1 = 10, a_2 = 40, a_3 = a_4 = a_5 = 0$
- $b_1 = b_2 = b_3 = 0, b_4 = 30, b_5 = 20$
- $Q = 10 + 40 = 30 + 20 = 50$
- $c_1 = 4, c_2 = 1, c_3 = 3, c_4 = 3, c_5 = 5$

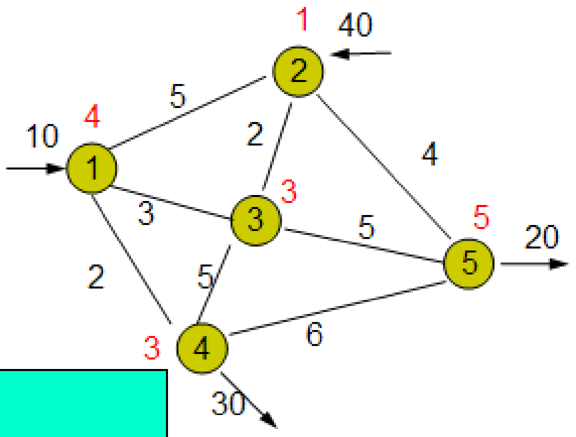


现已平衡，再求解。



接收 / 发送		产地 1	产地 2	转运 3	销地 4	销地 5	发送量
产地	1	-4	5	3	2	M	60
产地	2	5	-1	2	M	4	90
转运	3	3	2	-3	5	5	50
销地	4	2	M	5	-3	6	50
销地	5	M	4	5	6	-5	50
接收量		50	50	50	80	70	300

最优解



发送 \ 接收		产地 1	产地 2	转运 3	销地 4	销地 5	发送量
产地	1	-4 50	5	3	2 10	M	60
产地	2	5	-1 50	2 20	M	4 20	90
转运	3	3	2	-3 30	5 20	5	50
销地	4	2	M	5	-3 50	6	50
销地	5	M	4	5	6	-5 50	50
接收量		50	50	50	80	70	300

南京大學 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

第三章 运输问题

4. 应用问题举例

例1

某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供15、20、25、20台同一规格的柴油机。已知该厂各季度的生产能力及生产每台柴油机的成本如右表。如果生产出来的柴油机当季不交货，每台每积压一个季度需储存、维护等费用0.1万元。试求在完成合同的情况下，使该厂全年生产总费用为最小的决策方案。

	生产能力（台）	单位成本（万元）
一季度	25	12.0
二季度	35	11.0
三季度	30	11.5
四季度	20	12.5

obj: $$\min \quad z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

解：设 x_{ij}为第 i 季度生产的第 j 季度交货的柴油机数目，那么应满足：

交货：
$$\begin{aligned} x_{11} &= 15\\ x_{12}+x_{22} &= 20\\ x_{13}+x_{23}+x_{33} &= 25\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} &= 20 \end{aligned}$$

生产：
$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &\le 25\\ x_{22}+x_{23}+x_{24} &\le 35\\ x_{33}+x_{34} &\le 30\\ x_{44} &\le 20 \end{aligned}$$

例1

第 i 季度生产第 j 季度交货的每台柴油机所消耗的费用 c_{ij} 如下表：

	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
第一季度	12.0	12.1	12.2	12.3
第二季度		11.0	11.1	11.2
第三季度			11.5	11.6
第四季度				12.5

← c_{ij}

把第 i 季度生产的柴油机数目看作第 i个生产厂的产量；把第 j 季度交货的柴油机数目看作第 j 个销售点的销量；成本加储存、维护等费用看作运费。可构造下列产销平衡问题：

	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度	**Dummy**	产量
第一季度	12.0	12.1	12.2	12.3	0	25
第二季度	M	11.0	11.1	11.2	0	35
第三季度	M	M	11.5	11.6	0	30
第四季度	M	M	M	12.5	0	20
销量	15	20	25	20	30	

练习

光明仪器厂生产电脑绣花机是以产定销的。已知1至6月份各月的生产能力、合同销量和单台电脑绣花机平均生产费用见下表：

	正常生产能力（台）	加班生产能力（台）	销量（台）	单位费用（万元）
1月份	60	10	104	15
2月份	50	10	75	14
3月份	90	20	115	13.5
4月份	100	40	160	13
5月份	100	40	103	13
6月份	80	40	70	13.5

已知上年末库存103台绣花机，如果当月生产出来的机器当月不交货，则需要运到分厂库房，每台增加运输成本0.1万元,每台机器每月的平均仓储费、维护费为0.2万元。在7~8月份销售淡季，全厂停产1个月，因此在6月份完成销售合同后还要留出库存80台。加班生产机器每台增加成本1万元。问应如何安排1~6月份的生产，可使总的生产费用（包括运输、仓储、维护）最少？

练习

产销平衡运价表：

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	虚销地	正常产量	加班产量
0	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0	103	
1	15	15.3	15.5	15.7	15.9	16.1	0	60	
1’	16	16.3	16.5	16.7	6.9	17.1	0		10
2	M	14	14.3	14.5	14.7	14.9	0	50	
2’	M	15	15.3	15.5	15.7	15.9	0		10
3	M	M	13.5	13.8	14.0	14.2	0	90	
3’	M	M	14.5	14.8	15.0	15.2	0		20
4	M	M	M	13.0	13.3	13.5	0	100	
4’	M	M	M	14.0	14.3	14.5	0		40
5	M	M	M	M	13.0	13.3	0	100	
5’	M	M	M	M	14.0	14.3	0		40
6	M	M	M	M	M	13.5	0	80	
6’	M	M	M	M	M	14.5	0		40
销量	104	75	115	160	103	150	36		

第四章 整数规划

- 整数规划建模
- 整数规划求解
  - ✓ 割平面法
  - ✓ 分支定界法
- 指派问题

第四章 整数规划

1. 整数规划建模

1.1 整数规划的定义及分类

➤ 定义

- 一部分或全部决策变量是整数的规划问题称为整数规划（Integer Programming，简记为IP）
- 不考虑整数条件，由余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为该IP的松弛问题（Slack Problem）
- 若松弛问题是一个线性规划，则称该IP为整数线性规划

➤ 分类

- 所有决策变量都取整数的规划称为纯整数规划(Pure IP)
- 部分决策变量取整数的规划称为混合整数规划(Mixed IP)
- 决策变量只能取0或1的规划称为0-1型整数规划(0-1 IP)

例1. 背包问题

有一只背包，最大装载重量为w公斤，现有k种物品，每种物品的数量无限。第i种物品每件重量为w_i公斤，价值为v_i元。每种物品各取多少件装入背包，使其中物品的总价值最高？

假设取第 i 种物品 x_i 件 $(i=1,2,\cdots,k)$，则：

$$\max\ z = v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_kx_k$$

$$s.t.\begin{cases} w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_k\,x_k \le w \\ x_1, x_2, \cdots, x_k \ge 0 \\ x_1, x_2, \cdots, x_k \text{为整数} \end{cases}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

例2. 投资问题

设现有资金总额为B，可供选择的投资项目有n个，项目j所需投资额和预测收益分别为a_j和$c_j(j=1,2,\dots,n)$。由于种种原因，有三个附加条件：第一，若选择项目1，就必须同时选择项目2。反之，则不一定；第二，项目3和4中至少选择一个；第三，项目5，6 和7中恰好选择两个。请问应当怎样选择投资项目，才能使总预期收益最大？

$$\text{假设 } x_j=\begin{cases}1 & \text{投资项目}j\\ 0 & \text{不投资项目}j\end{cases}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

1.2 整数规划问题举例

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le B \\ x_2 \ge x_1 \\ x_3 + x_4 \ge 1 \\ x_5 + x_6 + x_7 = 2 \\ x_j = 0\text{或}1;\ \ j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

例3-1. 选址问题

设某商品有n个销地，各销地的需求量为b_j吨/天；现拟在m个地点中选址建生产厂，一个地方最多只能建一个工厂；若选 i 地建厂，生产能力为a_i吨/天，固定费用为d_i元/天；已知 i 址至销地 j 的运价为c_{ij}元/吨。如何选址和安排调运，总费用最小？

假设：

- $y_i = 1$，选择第i址建厂
- $y_i = 0$，不选择第 i 址建厂
- 从厂址i至销地 j 运量为 x_{ij}

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} d_i y_i$$

能力约束：$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i y_i, i = 1,2,\cdots,m$

需求约束：$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,2,\cdots,n$

非负约束：$x_{ij} \ge 0$

整数约束：$y_i = 0$或1

NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

例3-2. 选址问题

假设现需要新建一系列的设施点以服务若干的顾客点。候选设施点形成的集合记为F，顾客点形成的集合记为D(假设每个顾客点仅有一名顾客)。假设在 j 点新建设施，其建设费用为 f_j，该设施点至多能满足 u_j个顾客。当设施点 j 服务顾客点 i 的顾客时可获得收益 c_{ij}。请建立合适的选址决策模型，使设施方获得的总净收益最大。

假设：

- $x_j = \begin{cases} 1 & \text{选择第}j\text{个候选点建设施点} \\ 0 & o.w. \end{cases}, \ j \in F$
- $y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{第}j\text{个候选点服务第}i\text{个顾客点的顾客} \\ 0 & o.w. \end{cases},$

$i \in D,\ j \in F$

$$\max \sum_{i\in D}\sum_{j\in F} c_{ij}y_{ij} - \sum_{j\in F} f_j x_j$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i\in D} y_{ij} \le u_j x_j \\ \sum_{j\in F} y_{ij} = 1 \end{cases}$$

例4. 固定费用问题

高压容器公司制造小、中、大三种尺寸的金属容器，所用资源为金属板、劳动力和机器设备，制造一个容器所需的各种资源的数量如下表所示。不考虑固定费用，每种容器售出一只所得的利润分别为4万元、5万元、6万元，可使用的金属板有500吨，劳动力有300人，机器有100台，此外不管每种容器制造的数量是多少，都要支付一笔固定的费用：小号是100万元，中号为150万元，大号为200万元。现在要制定一个生产计划，使获得的利润为最大。

资源	小号容器	中号容器	大号容器
金属板（吨）	2	4	8
劳动力（人）	2	3	4
机器设备（台）	1	2	3

1.2 整数规划问题举例

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

假设：

- x_1, x_2, x_3分别为小号、中号和大号容器的生产数量
- $y_i = 1$，生产第 i 种容器
- $y_i = 0$，不生产第 i 种容器

$$\max\ z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 100y_1 - 150y_2 - 200y_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 500 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 300 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 100 \\ 0 \le x_i \le My_i,\ i = 1,2,3,\ M\text{充分大} \\ y_i \ge 0,\ y_i\text{为0−1变量},\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

- 两个条件只满足其中一个：

工序B的原加工方式每周工时约束条件为：

$$0.2x_1 + 0.4x_2 \leq 120$$

而新加工方式每周工时约束条件为：

$$0.3x_1 + 0.5x_2 \leq 150$$

若两者只能选其一，应如何表达？

$$y = \begin{cases} 0 & \text{若工序B采用原加工方式} \\ 1 & \text{若工序B采用新加工方式} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.2x_1 + 0.4x_2 \leq 120 + My \\ 0.3x_1 + 0.5x_2 \leq 150 + M(1-y) \end{cases}$$

- p 个条件只满足 q 个：

一般地，若需要从 p 个约束条件中恰好选择 q 个：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i = 1,2,\cdots,p)$$

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{若选择第}i\text{个约束条件} \\ 1 & \text{若不选择第}i\text{个约束条件} \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,p)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + M_i y_i \\ \sum_{i=1}^{p} y_i = p - q \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,p)$$

- 除0, 1以外，若遇到变量可以取多个整数值的问题，如何表达？

例：若x可取0到9之间的任意整数？

$$x = 2^0 x_0 + 2^1 x_1 + 2^2 x_2 + 2^3 x_3 \leq 9$$

其中，x_0, x_1, x_2, x_3均为0-1变量。

1.3 指派问题的数学模型

指派问题的标准形式（以人和事为例）：设有n个人和n件事，已知第i人做第j件事的费用为$c_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$；

要求一个人和事之间一一对应的指派方案，使完成这n件事的总费用最少。

$$C=(c_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

称C为指派问题的系数矩阵(coefficient matrix)。

1.3 指派问题的数学模型

为了建立标准指派问题的数学模型，引入n^2个0-1变量：

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当指派第}i\text{人去做第}j\text{事时}\\ 0 & \text{当不指派第}i\text{人去做第}j\text{事时}\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

问题的数学模型可写成：

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\quad \begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 & j=1,2,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 & i=1,2,\cdots,n\\ x_{ij}=0\text{或}1 & i,j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

比较
运输问题

例

某航空公司使用上海作为中转枢纽，以最少的航班数满足国内北方城市和南方城市之间的航空出行需求。从上午10点到11点有四架分别来自哈尔滨、长春、吉林、沈阳的波音747客机将在上海虹桥机场降落。这些飞机上的乘客将分别去往福州、广州、深圳、厦门。飞机的离场时间为11点30分到12点30分。表中列出了各个航班的乘客去往各目的地的情况表，即转机情况表。例如，来自哈尔滨的飞机，若飞往厦门则有38人不转机，剩下的去福州、广州和深圳等城市的都需要转机。此外，表中航班的出发地和目的地都是按时间的先后顺序排列的。例如，福州在广州之前表示去往福州的飞机将先于去往广州的飞机起飞。表格中标记为“-”的两个格子表示，由于来自沈阳的飞机到中转站（上海）的时间最迟，已经来不及在去福州和广州的城市的飞机起飞前完成到这两地的转机流程。请问应如何安排各航班离开虹桥机场后的目的地，以使得在虹桥机场转机的乘客数最少？

例

表 不同航班之间的旅客换乘情况

来自 \ 去往	福州	广州	深圳	厦门
哈尔滨	25	23	16	38
长春	45	8	9	24
吉林	12	8	22	28
沈阳	-	-	14	39

假设：

- $x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{指派从北方城市}i\text{飞来的飞机飞往南方城市}j\\ 0 & o.w.\end{cases}$
- c_{ij}为从北方城市i到南方城市j的线路上不转机的人数

$$\max\ z=\sum_{\text{所有可行弧}} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}=1\\ \sum_{i=1}^{4} x_{ij}=1\\ x_{ij}=0\text{或}1\end{cases}$$

最优解：

- 哈尔滨到广州
- 长春到福州
- 吉林到深圳
- 沈阳到厦门

129人无需转机

思考题 数独（The Sudoku Game）

Sudoku game is played on 9×9 grid which is subdivided into 9 blocks of 3×3 contiguous cells. The grid must be filled with numbers 1,2,..9, so that all the numbers between 1 and 9 appear in each row, in each column and in each of nine blocks. A game consists of an initial assignment of numbers in some cells. How to fill the other numbers?

8				2	6			
						7		4
			7					5
			1				3	6
	1			8			4	
9	8				3			
3					1			
7		5						
			2	5				8

7	8		4			1	2	
6				7	5			9
			6		1		7	8
		7		4		2	6	
		1		5		9	3	
9		4		6				5
	7		3				1	2
1	2				7	4		
	4	9	2		6			7