第二章 线性规划的对偶理论

4. 对偶单纯形法

单纯形法的基本思路：

找基 B，满足 $B^{-1}b \geq 0$，但 $c - c_B^T B^{-1} A$（即检验数）不全 ≤ 0。

$\xrightarrow{\text{迭代}}$ 保持 $B^{-1}b \geq 0$，使 $c - c_B^T B^{-1} A \leq 0$

对偶单纯形法的基本思路：

对偶问题的可行基

找基 B，满足 $c - c_B^T B^{-1} A \leq 0$，但 $B^{-1}b$ 不全 ≥ 0。

$\xrightarrow{\text{迭代}}$ 保持 $c - c_B^T B^{-1} A \leq 0$，使 $B^{-1}b \geq 0$

4.2 计算步骤

(1) 作初始表，要求全部 $c_j - z_j \leq 0$

(2) 判定：$B^{-1}b$ 全 ≥ 0，停止。否则，取

$$\min_i\{(B^{-1}b)_i | (B^{-1}b)_i < 0\} = (B^{-1}b)_r$$

其对应变量 x_r 为换出基变量。

(3) 确定换入变量

① 若第 r 行的a_{rj} 全 ≥ 0，停止，原问题无可行解。

4.2 计算步骤

(3) 确定换入变量

② 若第 r 行的 a_{rj} 有 $a_{rj}<0$，则求

$$\theta=\min_j\left\{\frac{c_j-z_j}{a_{rj}}\middle|a_{rj}<0\right\}=\frac{c_s-z_s}{a_{rs}}$$

其对应变量 x_s 为换入基的变量。

(4) 以 a_{rs} 为主元，换基迭代，得到新的单纯形表

重复1-4的步骤，直到找到最优解

4.2 计算步骤 – 步骤(3)的两个注释

南京大學 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

关于①的解释：第 r 个方程

$$(B^{-1}b)_r = x_r + \sum_{j=m+1}^{n} a_{rj}x_j$$

即 $$x_r = (B^{-1}b)_r - \sum_{j=m+1}^{n} a_{rj}x_j$$

$$\begin{array}{ccc} \wedge & \text{IV} & \vee \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

某 x_j 从 0 ↗，x_r 不能变为 $\geq$ 0。

4.2 计算步骤 – 步骤(3)的两个注释

关于②的解释：下一个表中的检验数为

$$(c_j - z_j)' = (c_j - z_j) - \frac{a_{rj}}{a_{rs}}(c_s - z_s) = a_{rj}\left[\frac{c_j - z_j}{a_{rj}} - \frac{c_s - z_s}{a_{rs}}\right]$$

为保持可行，必须 $(c_j - z_j)' \le 0$

(a) 对 $a_{rj} \ge 0$, 因 $c_j - z_j \le 0 \Rightarrow \frac{c_j - z_j}{a_{rj}} \le 0$, $\because a_{rs} < 0 \Rightarrow \frac{c_s - z_s}{a_{rs}} \ge 0$

(b) 对 $a_{rj} < 0$, 由 θ 的选取，知 $\left[\frac{c_j - z_j}{a_{rj}} - \frac{c_s - z_s}{a_{rs}}\right] \ge 0$

例题

例： $\min\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max\ -z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

			-2	-3	-4	0	0
	$\mathbf{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	✓ x_5	-4	[-2]	1	-3	0	1
		0	-2	-3	-4	0	0
0	✓ x_4	-1	0	[-5/2]	1/2	1	-1/2
-2	x_1	2	1	-1/2	3/2	0	-1/2
		-4	0	-4	-1	0	-1
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
		-28/5	0	0	-9/5	-8/5	-1/5

4.2 对偶单纯形的优点与用途

（1）初始解可以是非可行解，当检验数都是负数时，就可以进行基变换，这样避免了增加人工变量，使运算简便。

（2）对变量较少时，而约束条件很多的线性规划问题，可先将其变为对偶问题，再用对偶单纯形求解，简化计算。

（3）用于后面的灵敏度分析。

第二章 线性规划的对偶理论

5. 灵敏度分析

5.1 灵敏度分析简介

- 灵敏度分析，是指对系统或事物因周围条件变化显示出来的敏感性程度的分析。
- 资源向量的灵敏度分析 Range of feasibility for right-hand-side coefficients (b_i)
- 价值向量的灵敏度分析 Range of optimality for objective function coefficients (c_j)
- 技术系数的灵敏度分析 Range of optimality for matrix coefficients (a_{ij})

5.1 灵敏度分析简介

- ✓ 当这些参数 (b_i, c_j, a_{ij}) 中的一个或几个发生变化时，问题的最优解会有什么变化；或
- ✓ 这些参数在一个多大的范围内变化时，问题的最优解不变。

灵敏度分析不需要用单纯形法从头再算。只需把发生变化的个别系数，经过一定计算后直接填入最终单纯形表中，并进行检查和分析。

如最优解改变，可用单纯形法或对偶单纯形法继续迭代计算，直到找到新的最优解。

项 目			基变量	非基变量	
			x_B	x_N	x_S
c_B	x_B	$B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$	B^{-1}
$c_j - z_j$		$c_B^T B^{-1}b$	0	$c_N - c_B^T B^{-1}N$	$-c_B^T B^{-1}$

⇩

$B^{-1}b$	$B^{-1}A$
$c_B^T B^{-1}b$	$c - c_B^T B^{-1}A$

（1） $c_j, j \in N$的变化

（2） $c_j, j \in B$的变化

（3） b_i 的变化

（4） a_{ij}的变化

原问题	对偶问题	结论或继续计算的步骤
可行解	可行解	表中的解仍为最优解
可行解	非可行解	用单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	可行解	用对偶单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	非可行解	引进人工变量，编制新的单纯形表，求最优解

5.2 分析 c_j 的变化

参数 c_j 的变化仅仅影响到检验数 $(c_j - z_j)$ 的变化，所以反映到最终单纯形表上，只可能出现两种情况：

(1) 检验数仍然全部 ≤ 0，则最优解不变；

(2) 出现检验数 > 0，需用单纯形法继续迭代求解。

	c_j		2	1	0	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15/2	0	0	1	5/4	-15/2
1.5 $\cancel{2}$	x_1	7/2	1	0	0	1/4	-1/2
2 $\cancel{1}$	x_2	3/2	0	1	0	-1/4	3/2
	$c_j - z_j$		0	0	0	$\cancel{-1/4}$ 1/8	$\cancel{-1/2}$ -9/4

5.2 分析 c_j 的变化

c_2 在什么范围变化时，最优解不变？

c_j			2	1	0	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15/2	0	0	1	5/4	-15/2
2	x_1	7/2	1	0	0	1/4	-1/2
$1+\lambda$ $\cancel{1}$	x_2	3/2	0	1	0	-1/4	3/2
$c_j - z_j$			0	0	0	$\cancel{-1/4}$	$\cancel{-1/2}$
						$-1/4+\lambda/4$	$-1/2-3\lambda/2$

为使表中的解仍为最优解，应有

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\lambda \le 0 \\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\lambda \le 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3} \le \lambda \le 1 \ \Rightarrow \frac{2}{3} \le c_2 \le 2$$

5.3 分析 b_i 的变化

右端项 b_i 的变化在实际问题中为可用资源数量的变化。

b_i 的变化反映到最终单纯形表上将引起 $\boldsymbol{b}$ 列数字的变化，可能有下面两种情况：

(1) 问题的最优基不变，变化后的 $\boldsymbol{b}$ 列值为最优解（即生产产品的品种不变，但数量及最优值会变化）；

(2) 原问题不可行但对偶问题可行，用对偶单纯形继续迭代求最优解。

$\boldsymbol{B^{-1}b}$	$\boldsymbol{B^{-1}A}$
$\boldsymbol{-c_B^TB^{-1}b}$	$\boldsymbol{c-c_B^TB^{-1}A}$

初始表

c_j			2	1	0	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	$\cancel{24}$ 32	6	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

$\boldsymbol{B^{-1}b}$

最终表

c_j			2	1	0	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	35/2	0	0	1	5/4	-15/2
2	x_1	11/2	1	0	0	1/4	-1/2
1	x_2	-1/2	0	1	0	-1/4	3/2
$c_j - z_j$			0	0	0	-1/4	-1/2

B^{-1}

	c_j		2	1	0	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	35/2	0	0	1	5/4	-15/2
2	x_1	11/2	1	0	0	1/4	-1/2
1	x_2	-1/2	0	1	0	[-1/4]	3/2
	$c_j - z_j$		0	0	0	-1/4	-1/2

对偶单纯形

	c_j		2	1	0	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	**0**	0
2	x_1	5	1	1	0	**0**	1
0	x_4	2	0	-4	0	**1**	-6
	$c_j - z_j$		0	-1	0	0	-2

若最优基不变，那么b_3的变化范围是多少？

初始表

	c_j		2	1	0	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	基	b	x_1	x_2			x_5
0	x_3	15	0	5			0
0	x_4	24	6	2			0
0	x_5	$\cancel{5}$ $5+\lambda$	1	1			1
	$c_j - z_j$		2	1			0

$$b = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} - \frac{15}{2}\lambda \\ \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\lambda \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{B^{-1}b}$

最终表

	c_j		2	1	0	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15/2	0	0	1	5/4	-15/2
2	x_1	7/2	1	0	0	1/4	-1/2
1	x_2	3/2	0	1	0	-1/4	3/2
	c_j - z_j		0	0	0	-1/4	-1/2

B^{-1}

5.4 分析增加一个变量 x_j 的变化

增加一个变量 x_j 在实际问题中反映为增加一种新的产品。

即 技术系数矩阵多增加一列 P_j，检验数多增加一个 σ_j

最终单纯形表中它们的值如何得到?

$$P_j' = B^{-1}P_j$$

$$\sigma_j' = c_j - z_j = c_j - c_B^T B^{-1} P_j$$

$$\begin{cases} \sigma_j' \le 0 & \text{原最优解不变} \\ \sigma_j' > 0 & \text{按单纯形法继续迭代计算找出最优解} \end{cases}$$

5.4 分析增加一个变量 x_j 的变化

美佳公司又计划推出新型号的家电III，生产一件所需设备A、B及调试工序的时间分别为3h、4h、2h，该产品的预期盈利为3元/件。

该产品是否值得投产；如投产，该公司的最优生产计划有何变化?

初始表

	c_j		2	1	0	0	0	3
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

最终表

	c_j		2	1		0	0	0	3
c_B	基	b	x_1	x_2		x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	15/2	0	0		1	5/4	-15/2	-7
2	x_1	7/2	1	0	B^{-1}	0	1/4	-1/2	0
1	x_2	3/2	0	1		0	-1/4	3/2	2
	c_j-z_j		0	0	$-c_B^T B^{-1}$	0	-1/4	-1/2	1

用单纯形法继续迭代……

技术系数a_{ij}的变化使线性规划的约束系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 发生变化。

(1) 若变量x_j在最终单纯形表中为非基变量，则a_{ij}的变化不会使对应的$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{B}^{-1}$发生变化，而只影响P_j列，对检验数有影响，所以灵敏度分析方法同前面讨论的新增变量的情形；

(2) 若变量x_j在最终单纯形表中为基变量，则a_{ij}的变化将使对应的$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{B}^{-1}$随之发生变化，因此可能出现原问题和对偶问题均为非可行解的情形。

此时可通过引入人工变量的方法。

$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$
$-\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$

5.5 分析 a_{ij} 的变化

初始表

	c_j		2	1	0	0	0	3
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x'_2
0	x_3	15	0	5	1	0	0	8
0	x_4	24	6	2	0	1	0	4
0	x_5	5	1	1	0	0	1	1
	$c_j - z_j$		2	1	0	0	0	3

最终表

	c_j		2	1		0	0	0	3
c_B	基	b	x_1	x_2		x_3	x_4	x_5	x'_2
0	x_3	15/2	0	0		1	5/4	-15/2	11/2
2	x_1	7/2	1	0	B^{-1}	0	1/4	-1/2	1/2
1	x_2	3/2	0	1		0	-1/4	3/2	1/2
	$c_j - z_j$		0	0	$-c_B^T B^{-1}$	0	-1/4	-1/2	3/2

5.5 分析 a_{ij} 的变化

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

		c_j	2	3	0	0	0
c_B	基	b	x_1	x'_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	-9	0	0	1	4	-24
2	x_1	2	1	0	0	1/2	-2
3	x'_2	3	0	1	0	-1/2	3
	$c_j - z_j$		0	0	0	1/2	-5

		c_j	2	3	0	0	0	-M
c_B	基	b	x_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-M	x_6	9	0	0	-1	-4	[24]	1
2	x_1	2	1	0	0	1/2	-2	0
3	x'_2	3	0	1	0	-1/2	3	0
	$c_j - z_j$		0	0	−M	½ − 4M	−5+24M	0

5.6 分析增加一个约束条件的变化

增加一个约束条件在实际问题中相当于增添一道工序。

先将原问题最优解的变量值代入新增的约束条件：

(1) 如满足，说明新增约束未起作用，最优解不变；

(2) 如不满足，则需将新增的约束直接反映到最终单纯形表中再进一步分析。

仍以美佳公司为例，设家电I，II 经调试后，还需经过一道环境试验工序。家电I每件须环境试验3h，家电II需每件2h，环境试验工序每天生产能力为12h。试分析增加该工序后的美佳公司最优生产计划。

$$3x_1+2x_2\le 12\ (x_1^*=7/2\,,x_2^*=3/2)$$

$$3x_1+2x_2+x_6=12$$

5.6 分析增加一个约束条件的变化

	c_j		2	1	0	0	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	15/2	0	0	1	5/4	-15/2	0
2	x_1	7/2	1	0	0	1/4	-1/2	0
1	x_2	3/2	0	1	0	-1/4	3/2	0
0	x_6	12	3	2	0	0	0	1
	$c_j - z_j$		0	0	0	-1/4	-1/2	0

	c_j		2	1	0	0	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	15/2	0	0	1	5/4	-15/2	0
2	x_1	7/2	1	0	0	1/4	-1/2	0
1	x_2	3/2	0	1	0	-1/4	3/2	0
0	x_6	-3/2	0	0	0	-1/4	[-3/2]	1
	$c_j - z_j$		0	0	0	-1/4	-1/2	0

对偶单纯形…

5.6 分析增加一个约束条件的变化

	c_j		2	1	0	0	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	15	0	0	1	5/2	0	-5
2	x_1	4	1	0	0	1/3	0	-1/3
1	x_2	0	0	1	0	-1/2	0	1
0	x_5	1	0	0	0	1/6	1	-2/3
	$c_j - z_j$		0	0	0	-1/6	0	-1/3

<u>练习</u>：已知某企业计划生产3种产品A、B、C，其资源消耗与利润如表所示。

	A	B	C	资源量
甲	1	1	1	12
乙	1	2	2	20
利润	5	8	6	

问：如何安排产品产量，可获最大利润?

$$\max\ z = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 20 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

练习

$$\max\ z = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	A	B	C	资源量
甲	1	1	1	12
乙	1	2	2	20
利润	5	8	6	

初始表

			5	8	6	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	12	1	1	1	1	0
0	x_5	20	1	2	2	0	1
		0	5	8	6	0	0

最终表

			5	8	6	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_1	4	1	0	0	2	−1
8	x_2	8	0	1	1	−1	1
		84	0	0	−2	−2	−3

练习

(1) c_3在什么范围内变化，最优解不变？

(2) 若c_1变为10（即产品A的利润变为10），最优生产方案是什么？

(3) b_1在什么范围变化不影响最优生产方案？

(4) 若开发新产品D，该单位产品消耗甲3个单位，乙2个单位，可得利润10。问投产该产品D是否有利？

(5) 假设现电力供应紧张，最多为13个单位，而生产产品A，B，C每单位分别需要2、1、3个单位。问该公司的生产方案是否需要改变？

(6) 若生产产品A的工艺发生改变，生产产品A对甲，乙原材料的需求分别为2、2，单位产品的利润不变。问最优生产方案如何变化？

目标规划
(Goal Programming)

南京大學 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

例1: 某公司生产3种产品I、II和III，采用4种资源A、B、C和D，产品价格、每件产品所需资源量和资源总量如下表。请制定产值最大的生产计划。

	产品I	产品II	产品III	资源总量
设备A/h	3	1	2	200
设备B/h	2	2	4	220
材料C/kg	4	5	1	360
材料D/kg	2	3	5	300
价格/(万元/件)	40	30	50	

目标规划

现在决策者由于对企业现状和市场需求的进一步掌握，感到上述最优解不能直接用于决策，进一步提出一些经营目标并按优先顺序列出如下：

（1）利润不少于3400万元；

（2）产品I的产量不能超过产品II产量的1.5倍；

（3）产品III的产量不低于30件；

（4）设备能力不足时可以加班，但应尽可能少加班；

（5）材料一定不能超过总量。

目标规划

$$\max z = 40x_1 + 30x_2 + 50x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 200 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 220 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \le 360 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 300 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40x_1 + 30x_2 + 50x_3 \ge 3400 \\ x_1 - 1.5x_2 \le 0 \\ x_3 \ge 30 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 200 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 220 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \le 360 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 300 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

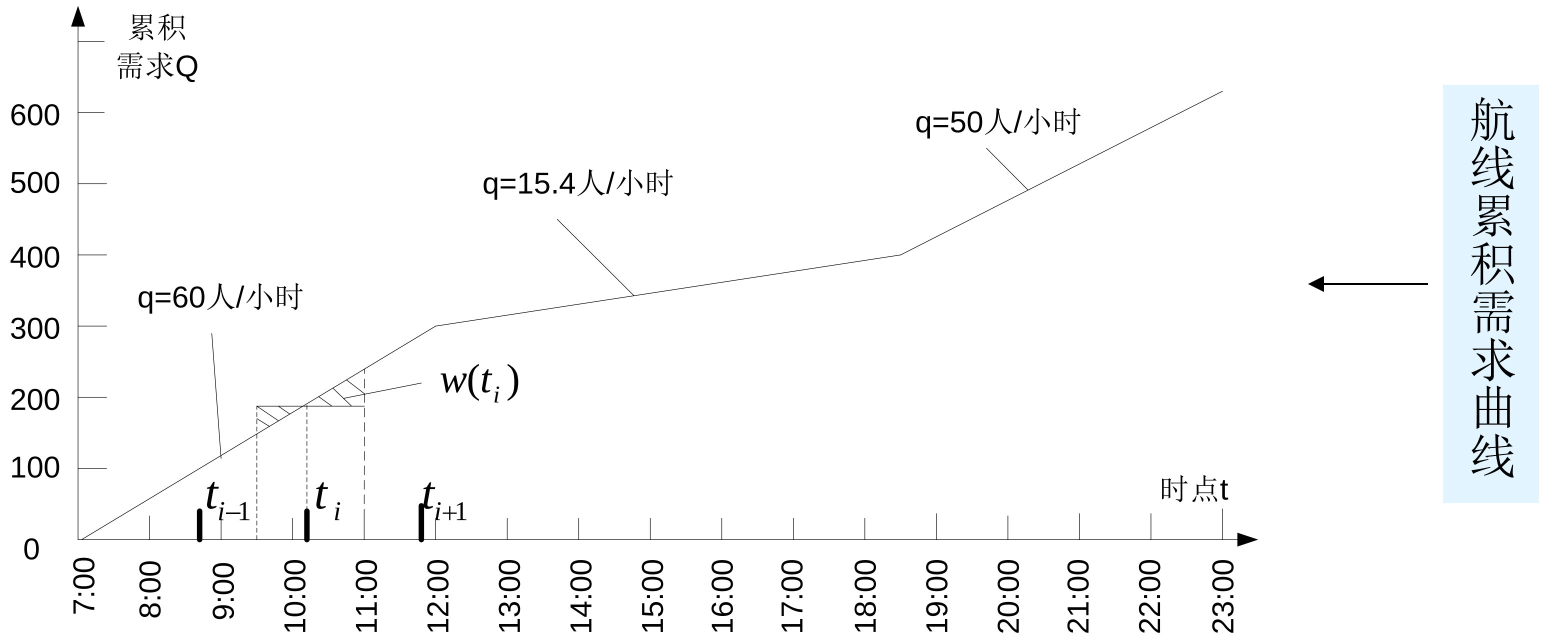
- 约束不能同时满足，也就是说不存在上述约束的可行域。
- 这些约束是矛盾的，属于目标约束问题。

目标规划

多目标优化问题

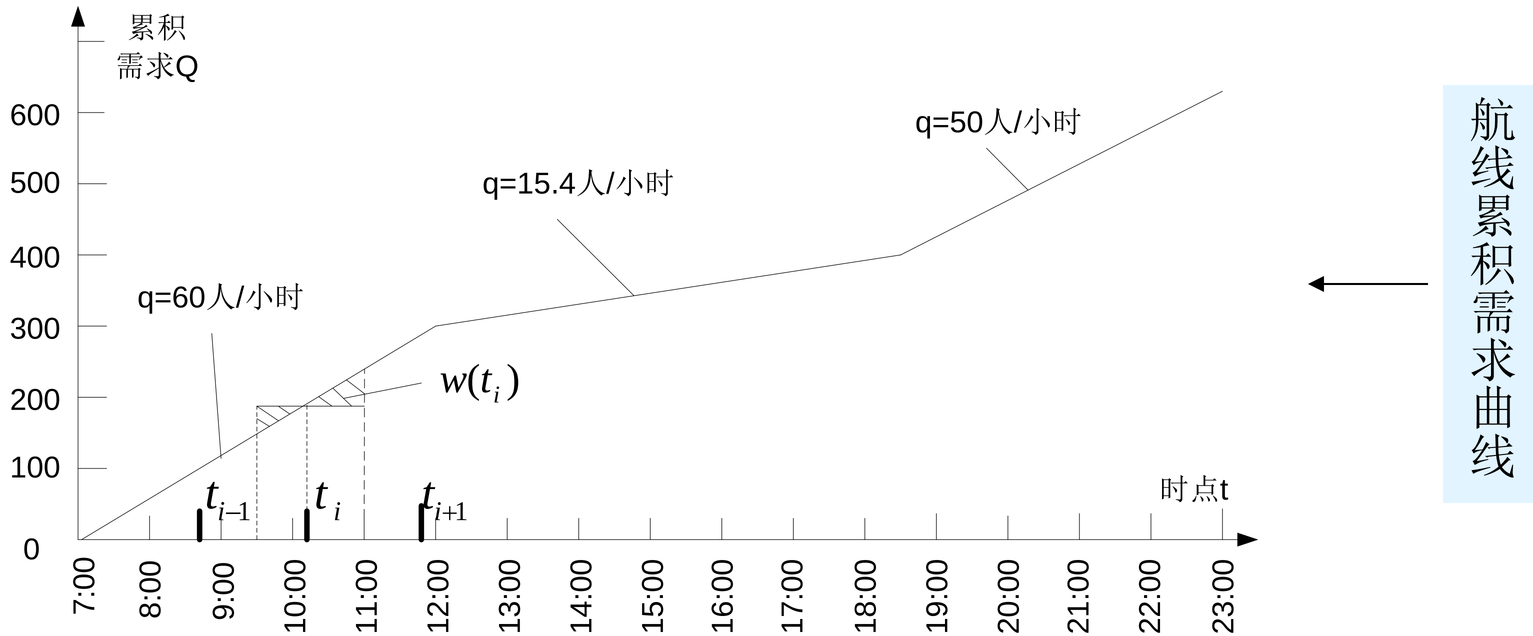
例2: 航空公司根据航线一天累积需求随时间的分布、票价和旅客延误成本来决定一天的航班频率和时刻，要求利润最大、旅客损失最少和旅客计划延误成本最小，这就是航班计划问题。这里的计划延误是指由于航班计划的出发时刻与旅客最佳出行时间不一致造成的延误。一般来说，航班频率越高，计划延误将越小，则旅客的出行成本越小，服务水平越高。但航班频率高了，航空公司的运行成本将增加，同时每航班的旅客需求将减少，造成航班亏损。航班计划的优化应当在这两者之间寻得平衡。

目标规划



假设航线每天早晨7点开始有旅客需求，到晚上23点后没有旅客需求。该航线的日累积需求分布图由3段直线构成，直线的斜率代表需求密度，每段直线的斜率不同。该航线航班的可用座位数为125，每航班成本为15200元，平均票价为650元，旅客计划延误成本为30元/人·h。出于安全，前后两航班的间隔不小于0.4h，如果旅客计划延误超过0.6h，旅客就会流失到其它航空公司，航班计划应力求减少旅客损失。请给出合适的航班计划。

目标规划



m: 每天的航班频率

l_i: 第i个航班的客座率

t_i: 第i个航班的出港时刻

$q(t)$: 旅客需求密度

$Q(t)$: 累积需求

根据有关研究成果得，第i航班的期望旅客数为

$$N(t_i) = 125 l_i = 2Q(t_i) - 2Q\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)$$

当$t_i - \frac{t_{i-1}+t_i}{2} = \frac{t_i - t_{i-1}}{2} > 0.6$时，

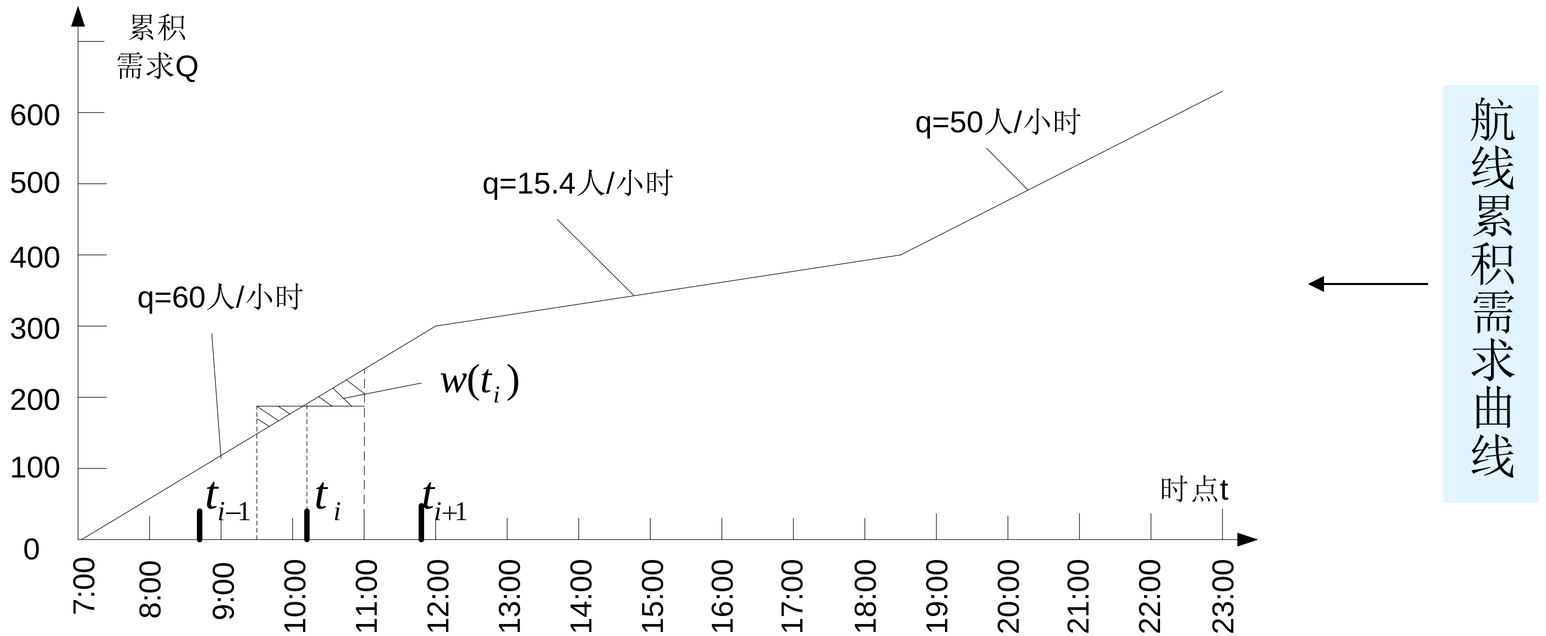
$$N(t_i) = 2Q(t_i) - 2Q(t_i - 0.6)$$

同时损失旅客数为$L(t_i) = 2Q(t_i - 0.6) - 2Q(\frac{t_{i-1}+t_i}{2})$

旅客计划延误为 $w(t_i) = Q(t_i) - Q\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right) \cdot \frac{h(t_i)}{4} + [Q\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right) - Q(t_i)] \cdot \frac{h(t_{i+1})}{4}$

其中 $h(t_i) = t_i - t_{i-1}$, $h(t_{i+1}) = h(t_i) q\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right) / q(t_i)$

目标规划



$$\max z_1 = 650\sum_{i=1}^{m} N(t_i) - 15200m - 30\sum_{i=1}^{m} w(t_i)$$

$$\min z_2 = \sum_{i=1}^{m} L(t_i)$$

$$\min z_3 = 30\sum_{i=1}^{m} w(t_i)$$

$$s.t.\begin{cases} t_i - t_{i-1} \ge 0.4 \\ 1 \ge l_i \ge 0.6 \\ t_1 \ge 7, t_m \le 23 \end{cases}$$

航班计划问题的三个目标一般不能同时满足，该问题叫做<u>多目标优化问题</u>。

多目标优化问题的一般形式

$$\min\left[f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x)\right]$$

$$s.t.\ g_i(x) \geq 0, i = 1,2,\cdots,m$$

* 其中$f_i(x), i = 1,2,\cdots,p$是p个目标函数，如果有些目标函数是求最大，则取它的相反数，将其转化为求最小的目标函数。
* $g_i(x), i = 1,2,\cdots,m$ 是约束条件，由它构成可行域R。

- 能使所有p个目标函数同时达到最优的可行解定义为多目标优化问题的绝对最优解。
- 如果绝对最优解不存在或不容易解得，将寻求所谓有效解，即Pareto最优解。该解是满足约束条件的可行解，它使各目标函数值相对于其它可行解不差，且至少有一个目标函数达到了最优。

目标规划

1. 加权和法

$$\min\ P(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x) \qquad 0 \le \lambda_i \le 1, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

$$s.t.\ g_i(x) \ge 0, i = 1,2,\cdots,m$$

2. 主要目标法

$$\min\ z = f_1(x)$$

$$s.t.\ \ g_i(x) \ge 0, i = 1,2,\cdots,m$$

$$l_i \le f_i(x) \le u_i, i = 2,3,\cdots,p$$

3. 加权理想值差法

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{p} w_i |f_i(x) - f_i^*|$$

$$s.t.\ \ g_i(x) \ge 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{目标规划的数学模型}}$

目标规划

只考虑线性多目标规划问题时，目标规划数学模型可以写成：

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{p} w_i |f_i(x) - f_i^*|$$

$$s.t.\ \ Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

其中 f_i^* 是目标函数 $f_i(x)$ 的目标值，或理想值。

$$d_i^+ = \frac{1}{2}(|f_i(x) - f_i^*| + f_i(x) - f_i^*)$$

$$d_i^- = \frac{1}{2}(|f_i(x) - f_i^*| - f_i(x) + f_i^*)$$

正、负偏差量： $d_i^+ d_i^- = 0$

$$\min z = \sum_{i=1}^{p} w_i(d_i^+ + d_i^-)$$

$$s.t.\ \ Ax \geq b$$

$$f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = f_i^*$$

$$x \geq 0;\ d_i^+, d_i^- \geq 0, i = 1,2,\cdots,p$$

目标规划

$$\min\ z=\sum_{i=1}^{p} w_i(d_i^+ + d_i^-)$$

$$s.t.\ \ Ax \geq b$$

$$f_i(x)+d_i^- - d_i^+ = f_i^*$$

$$x \geq 0;\ d_i^+, d_i^- \geq 0, i=1,2,\cdots,p$$

目标规划的数学模型中对正负偏差可以采用不同的权值，有

$$\min\ z=\sum_{i=1}^{p}({w_i}^+ d_i^+ + {w_i}^- d_i^-)$$

$$s.t.\ \ Ax \geq b$$

$$f_i(x)+d_i^- - d_i^+ = f_i^*$$

$$x \geq 0;\ d_i^+, d_i^- \geq 0, i=1,2,\cdots,p$$

目标规划

如果把前面的 $f_i(x)$ 和 f_i^* 分别看做目标约束条件的左右两项，则目标规划模型仍然适合于目标约束的情况：

$$
\begin{aligned}
\min z &= w_1^- d_1^- + w_2^+ d_2^+ + w_3^- d_3^- \\
s.t.\ \ 40x_1 + 30x_2 + 50x_3 + d_1^- - d_1^+ &= 3400 \\
x_1 - 1.5x_2 + d_2^- - d_2^+ &= 0 \\
x_3 + d_3^- - d_3^+ &= 30 \\
x_i \geq 0, d_i^+, d_i^- \geq 0, i &= 1,2,3
\end{aligned}
$$

- 目标约束问题主要由于约束条件过于刚性化，通过加入偏差变量使其具有一定的柔性，可以在一定的范围内变动，从而化“不可行”为“可行”。
- 多目标规划问题主要是因为各目标函数的最优点不重合，如果对各目标函数降低一些要求，让它们可以在理想点附近变动，这样便可以找到对各目标都可以“接受”的解。

⟹ **两种处理思路在数学表达上具有相同的形式**

- 带有优先级的目标规划

无论是目标约束问题还是多目标规划问题，转化为目标规划后，可能还是无法找到满足所有指标的最优解，而只能优先满足其中某些指标要求。此时可以给目标制订相应的优先级，在不能满足所有目标时，首先应满足优先级较高的指标。

假设决策者一共面临 p 个决策目标, 它需根据决策目标的轻重缓急将 p 个决策目标划分为 m 个层次，从第1层次到第 j 层次累计含有 $J(j)$ 个决策目标。$J(m) = p, J(0) = 0$

给每个层次从高到低制定一个优先级 $P_j, j = 1,2,\cdots,m$，并且假定

$$P_1 > P_2 > \cdots > P_m \text{ 或 } \frac{P_{j-1}}{P_j} = \infty, j = 2,3,\cdots,m;\ P_m = \infty$$

更一般的带有优先级的目标规划模型:

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{m} P_j \sum_{i=J(j-1)+1}^{J(j)} (w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-)$$

$$s.t.\ \ f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = f_i^*, i = 1,2,\cdots,p$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0; d_i^+, d_i^- \geq 0, i = 1,2,\cdots,p$$

根据例1给出的5个指标要求及其优先顺序，给出问题的目标规划模型:

允许加班可以表达为: $3x_1 + x_2 + 2x_3 + d_4^- - d_4^+ = 200$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + d_5^- - d_5^+ = 220$$

但尽可能少加班应表达为:

$$\min\ (w_4^+ d_4^+ + w_5^+ d_5^+)$$

目标规划

$$\min\ z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 d_3^- + P_4(1.1 d_4^+ + d_5^+)$$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & \left.\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + x_3 &\le 360 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 &\le 300 \end{aligned}\right\}\text{绝对约束} \\
& \left.\begin{aligned} 40x_1 + 30x_2 + 50x_3 + d_1^- - d_1^+ &= 3400 \\ x_1 - 1.5x_2 + d_2^- - d_2^+ &= 0 \\ x_3 + d_3^- - d_3^+ &= 30 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + d_4^- - d_4^+ &= 200 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + d_5^- - d_5^+ &= 220 \end{aligned}\right\}\text{目标约束} \\
& x_i \ge 0, i = 1,2,3;\ d_i^+, d_i^- \ge 0, i = 1,2,\cdots,5
\end{aligned}
$$

取 $w_4^+ = 1.1 > w_5^+ = 1$ 表示设备 A 增加工时比设备 B 稍微困难。

练习：

某航空公司用某机型飞两条线，平均运输能力是6万客•km/h，正常生产周利用率是70h。根据市场预测，下周的客运周转量航线I是300万客•km，航线II是264万客•km，已知航线I和航线II每客•km的利润分别是0.4元和0.25元。若航线经理只考虑利润最大，则两航线应分别安排多少飞行h。现航线经理还要考虑其他因素，他制定的管理目标如下：

（1）保证有效飞机周利用率的充分利用；

（2）必要时可加班飞行，但加班飞行小时尽量不超过10h；

（3）努力满足两条航线的需求；

（4）尽量减少加班飞行时间。

问该经理该如何决策？

目标规划

$$\min\ z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(4d_3^- + 2.5d_4^-) + P_4 d_1^+$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 70 \\ & d_1^+ + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ & x_1 + d_3^- - d_3^+ = 50 \\ & x_2 + d_4^- - d_4^+ = 44 \\ & x_1, x_2 \ge 0;\ d_i^+, d_i^- \ge 0, i = 1,2,3,4 \end{aligned}$$