第二章 线性规划的对偶理论

- 线性规划的对偶问题
- 对偶问题的基本性质
- 影子价格
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

第二章 线性规划的对偶理论

1. 线性规划的对偶问题

1.1 对偶问题的提出

在第1部分的例1中， 我们讨论了如下的生产计划模型：

例1. 生产计划问题

	A	B	备用资源
煤	1	2	30
劳动力	3	2	60
仓库	0	2	24
利润	40	50	

问产品A, B各生产多少, 可获最大利润?

假定现有一公司想把该工厂的生产资源收购过来，那么它至少应付出多大的代价，才能使该工厂愿意放弃生产活动，出让自己的资源？

现在从另一个角度来讨论这个问题

1.1 对偶问题的提出

- 设用y_1，y_2，y_3分别表示煤、劳动力和仓库这三种资源的单位定价。
- 因为用1个单位的煤和3个单位的劳动力可以生产一件产品A，从而获得40元利润。那么生产每件产品A的资源出让所得应不低于生产一件产品A的利润，即

$$y_1 + 3y_2 \geq 40$$

- 同理，将可以生产每件产品B的资源出让的所得应不低于生产一件产品B的利润，即

$$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 50$$

1.1 对偶问题的提出

- 要把所有的资源都收购需付出：

$$w = 30y_1 + 60y_2 + 24y_3$$

- 当然收购公司希望用最小的代价把工厂的全部资源收买过来，故有：

$$\min\ w = 30y_1 + 60y_2 + 24y_3$$

对偶问题 (DUAL)

$$s.t. \begin{cases} y_1 + 3y_2 \geq 40 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 50 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

例2.

饲料	维生素 A	B	C	每单位成本
1	4	1	0	2
2	6	1	2	5
3	1	7	1	6
4	2	5	3	8
每天维生素的最低需求	12	14	8	

请给维生素A, B, C制定销售价格?

问最经济的配食方案是什么?

换个角度 → 维生素的销售商

1.2 线性规划原问题与对偶问题的表达形式

原问题		对偶问题
$\max z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$	$\Rightarrow$	$\min w = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$
$s.t. \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{cases}$		$s.t. \begin{cases} \mathbf{A}^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0} \end{cases}$

A 矩阵
x, b 列向量
c 列向量

A 矩阵
y, b 列向量
c 列向量

"对称型"原–对偶问题

1.2 线性规划原问题与对偶问题的表达形式

原问题

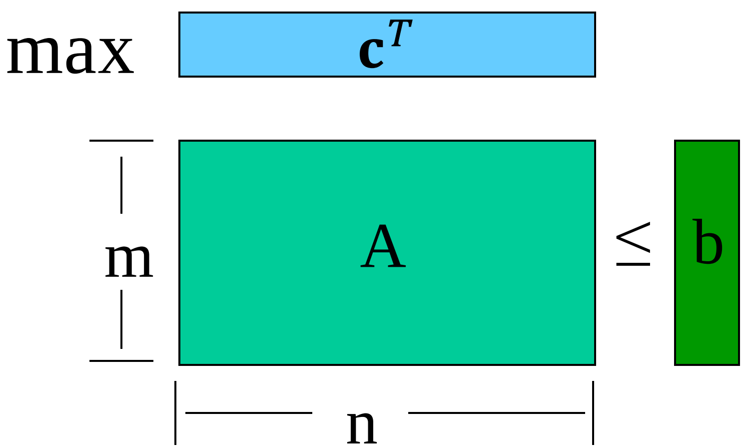
$$\max z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

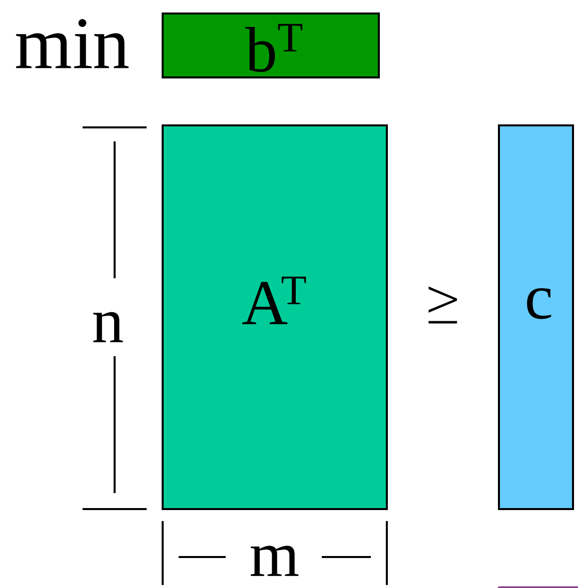
$$s.t.\begin{cases}\mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\end{cases}$$

对偶问题

$$\min w = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$$

$$s.t.\begin{cases}\mathbf{A}^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0}\end{cases}$$





1.2 线性规划原问题与对偶问题的表达形式

$$\max z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \qquad s.t.\begin{cases}\mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\end{cases}$$

对偶的定义

$$\min w = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \qquad s.t.\begin{cases}\mathbf{A}^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0}\end{cases}$$

$$\max w = -\mathbf{b}^T\mathbf{y} \qquad s.t.\begin{cases}-\mathbf{A}^T\mathbf{y} \le -\mathbf{c} \\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0}\end{cases}$$

对偶的定义

$$\min z = -\mathbf{c}^T\mathbf{x} \qquad s.t.\begin{cases}-\mathbf{Ax} \ge -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\end{cases}$$

对偶问题的对偶就是原问题！

"非对称型"

$$\max\ f(x) = 4x_1 + 5x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 20 \\ 4x_1 - 3x_2 \ge 10 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \pm \text{不限} \end{cases}$$

化为(**max, ≤**)型标准问题

$$\max\ f(x) = 4x_1 + 5x'_2 - 5x''_2$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 \le 20 \\ -4x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 \le -10 \\ x_1 + x'_2 - x''_2 \le 5 \\ -x_1 - x'_2 + x''_2 \le -5 \\ x_1, x'_2, x''_2 \ge 0 \end{cases}$$

对偶变换

$$\min\ h(w) = 20w_1 - 10w_2 + 5w_3 - 5w_4$$
$$s.t.\begin{cases} 3w_1 - 4w_2 + w_3 - w_4 \ge 4 \\ 2w_1 + 3w_2 + w_3 - w_4 \ge 5 \\ -2w_1 - 3w_2 - w_3 + w_4 \ge -5 \\ w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0 \end{cases}$$

令 $y_1 = w_1, y_2 = -w_2, y_3 = w_3 - w_4$, 得:

$$\min\ g(y) = 20y_1 + 10y_2 + 5y_3$$
$$s.t.\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 4 \\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 = 5 \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3 \pm \text{不限} \end{cases}$$

对偶关系对应表

<table>
<tr><th></th><th>（P）</th><th>（D）</th></tr>
<tr><td>目标函数</td><td>max</td><td>min</td></tr>
<tr><td>目标系数</td><td>C</td><td>b</td></tr>
<tr><td>约束右端</td><td>b</td><td>C</td></tr>
<tr><td>系数矩阵</td><td>A</td><td>A^T</td></tr>
<tr><td rowspan="4">函数约束与
变量约束</td><td colspan="2">第k个约束 ↔ 第k个变量</td></tr>
<tr><td colspan="2">约束个数=变量个数</td></tr>
<tr><td colspan="2">（非）规范约束 ↔ 非负（正）变量</td></tr>
<tr><td colspan="2">等式约束↔ 自由变量</td></tr>
</table>

✓ 练习：

请写出下面线性规划问题的对偶问题。

$$\min z = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_3 \ge 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1\text{无限制}, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max w = 6y_1 + 9y_2 + 4y_3$$

$$s.t.\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \\ 2y_1 + 5y_3 \le 2 \\ 3y_2 - 2y_3 \le -3 \\ y_1 \le 0, y_2 \ge 0, y_3\text{无限制} \end{cases}$$

第二章 线性规划的对偶理论

2. 对偶问题的基本性质

2.1 对偶问题解与原问题解的关系

设原问题：

$$\max\ z = c^T x$$
$$s.t.\ Ax + x_s = b$$
$$x, x_s \geq 0$$

松弛变量

其对偶问题：

$$\min\ w = b^T y$$
$$s.t.\ A^T y - y_s = c$$
$$y, y_s \geq 0$$

剩余变量

<u>则原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题的一个可行解</u>

	x_B	x_N	x_S
检验数 →	$\mathbf{0}$	$c_N - c_B^T B^{-1} N$	$-c_B^T B^{-1}$
	$-y_{s1}$	$-y_{s2}$	$-y$

- y_{s_1}是对应原问题中基变量 x_B 的剩余变量
- y_{s_2}是对应原问题中非基变量 x_N 的剩余变量

2.1 对偶问题解与原问题解的关系

初始单纯形表：

项　目			非基变量		基变量
			x_B	x_N	x_S
0	x_S	b	B	N	I
σ_j			c_B	c_N	0

当迭代后基变量为 X_B 时：

项　目			基变量	非基变量	
			x_B	x_N	x_S
c_B	x_B	$B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$	B^{-1}
σ_j			0	$c_N - c_B^T B^{-1} N$	$-c_B^T B^{-1}$

$c_B - c_B^T B^{-1} B = 0$

当 B 为最优基时：　≤ 0　　≤ 0

2.1 对偶问题解与原问题解的关系

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

$$\left.\begin{array}{l} c_B - c_B^T B^{-1} B = 0 \\ c_N - c_B^T B^{-1} N \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} c - c_B^T B^{-1} A \le 0 \\ -c_B^T B^{-1} \le 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

令 $y^T = c_B^T B^{-1}$ $\quad \begin{cases} A^T y \ge c \\ y \ge 0 \end{cases}$

由此可见，y是对偶问题的一个可行解。

将这个解代入对偶问题的目标函数，有

$$w = b^T y = y^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B = z$$

即当原问题为最优解时，这时对偶问题为可行解，且两者具有相同的目标函数值。

2.1 对偶问题解与原问题解的关系

例：设产品 A, B 产量为 x_1, x_2，z为利润

$$\max\ z = 5x_1 + 6x_2$$

机器台时
劳动工时

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 48 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 120 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 48 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 120 \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

			5	6	0	0
	$\boldsymbol{x}_B$	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	48	3	1	1	0
0	x_4	120	3	(4)	0	1
		0	5	6	0	0
0	x_3	18	(9/4)	0	1	-1/4
6	x_2	30	3/4	1	0	1/4
		180	1/2	0	0	-3/2
5	x_1	8	1	0	4/9	-1/9
6	x_2	24	0	1	-1/3	1/3
		184	0	0	-2/9	-13/9

$\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{B}^{-1}$

$$\boldsymbol{x} = (8, 24)^T, \quad z = 184$$

$$\max\ z = 5x_1 + 6x_2$$

机器台时
劳动工时

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 48 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 120 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题：

$$\min w = 48y_1 + 120y_2$$

$$s.t.\begin{cases} 3y_1 + 3y_2 \ge 5 \\ y_1 + 4y_2 \ge 6 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

标准化 $\downarrow$

$$\min w = 48y_1 + 120y_2 + My_5 + My_6$$

$$s.t.\begin{cases} 3y_1 + 3y_2 - y_3 + y_5 = 5 \\ y_1 + 4y_2 - y_4 + y_6 = 6 \\ y_1 \sim y_6 \ge 0 \end{cases}$$

			48	120	0	0	M	M
	y_B		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
M	y_5	5	3	3	−1	0	1	0
M	y_6	6	1	4	0	−1	0	1
		11M	48−4M	120-7M	M	M	0	0
M	y_5	1/2						
120	y_2	3/2						
		180+1/2M						
48	y_1	2/9	1	0	−4/9	1/3	4/9	−1/3
120	y_2	13/9	0	1	1/9	−1/3	−1/9	1/3
		184	0	0	8	24	M−8	M-24

5	x_1	**8**	**1**	**0**	**4/9**	**-1/9**
6	x_2	**24**	**0**	**1**	**-1/3**	**1/3**
		184	**0**	**0**	**-2/9**	**-13/9**

$$\boldsymbol{y} = (2/9, 13/9)^T, \quad w = 184$$

2.2 弱对偶性

如果 $\bar{x}_j(j=1,\dots,n)$ 是原问题的可行解，$\bar{y}_i(i=1,\dots,m)$ 是其对偶问题的可行解，则恒有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\bar{x}_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i\bar{y}_i \quad (c^T\bar{x} \le b^T\bar{y})$$

证明：

$$\left.\begin{array}{r} A\bar{x} \le b \\ \bar{y} \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{y}^T A\bar{x} \le \bar{y}^T b$$

$$\left.\begin{array}{r} A^T\bar{y} \ge c \\ \bar{x} \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x}^T A^T\bar{y} \ge \bar{x}^T c$$

$$\Rightarrow \bar{y}^T A\bar{x} \ge \bar{x}^T c$$

$$\Rightarrow \bar{x}^T c \le \bar{y}^T b$$

$$\Rightarrow c^T\bar{x} \le b^T\bar{y}$$

2.2 弱对偶性

由弱对偶性，可得出以下的推论：

➢ 原问题有可行解且目标函数值无界，则其对偶问题无可行解；反之，对偶问题有可行解且目标函数值无界，则其原问题无可行解。

（注意：逆命题不成立）

➢ 若原问题有可行解而对偶问题无可行解，则原问题目标函数值无界；反之，对偶问题有可行解而原问题无可行解，则对偶问题的目标函数值无界。

如果$\hat{x}_j (j=1,\dots,n)$ 是原问题的可行解，$\hat{y}_i (i=1,\dots,m)$ 是其对偶问题的可行解，且有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i$$

则$\hat{x}_j (j=1,\dots,n)$ 是原问题的最优解，$\hat{y}_i (i=1,\dots,m)$ 是其对偶问题的最优解。

证明：设 $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ 分别是原问题和对偶问题的最优解，则

$$\left.\begin{array}{c} c^T\hat{x} \le c^T x^*, b^T\hat{y} \ge b^T y^* \\ c^T\hat{x} = b^T\hat{y} \end{array}\right\} \Rightarrow c^T x^* \ge b^T y^*$$

再由弱对偶性：$c^T x^* \le b^T y^*$

$$\Rightarrow c^T\hat{x} = c^T x^* = b^T y^* = b^T\hat{y}$$

2.4 强对偶性（对偶定理）

若原问题与其对偶问题均具有可行解，则两者均具有最优解，且它们的最优解的目标函数值相等。

证明：

- 由于两者均有可行解，根据弱对偶性推论，原问题的目标函数值具有上界，对偶问题的目标函数值具有下界。

  因此，两者均具有最优解。

- 由前面的讨论知，当原问题为最优解，即 B 为最优基时，$y^T = c_B^T B^{-1}$ 是其对偶问题的可行解，且两者目标函数值相等。由最优性条件，得此 y 即为最优解。

2.5 互补松弛性（松紧定理）

在线性规划问题的最优解中，如果对应某一约束条件的对偶变量值为非零，则该约束条件条件取严格等式；反之，如果约束条件取严格不等式，则其对应的对偶变量为零。

原问题：
$$\max\ z = c^T x \qquad \begin{cases} Ax + x_s = b \\ x, x_s \geq 0 \end{cases} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x_s = \begin{pmatrix} x_{s1} \\ \vdots \\ x_{sm} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{① 若}\hat{y}_i > 0\text{，则有}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j = b_i\text{，即}\hat{x}_{si} = 0; \\ \\ \text{② 若}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j < b_i\text{，即}\hat{x}_{si} > 0\text{，则有}\hat{y}_i = 0. \end{array}\right\} \hat{x}_{si} \cdot \hat{y}_i = 0$$

2.5 互补松弛性（松紧定理）

证明：设 $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ 分别是原问题和对偶问题的最优解，则

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i \geq c_j, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j \leq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\hat{y}_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i\,\hat{y}_i$$

又根据最优性：$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$，

故 $\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i\right]\hat{y}_i = 0$。

因为：$\hat{y}_i \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i \leq 0$，故$\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i\right]\hat{y}_i = 0$。

$\Rightarrow$ 当$\hat{y}_i \geq 0$时，必有$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i = 0$；当$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i \leq 0$，必有$\hat{y}_i = 0$。

例. 已知线性规划问题

$$\min\ z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t.}\quad x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

✓ 其对偶问题的最优解为 $y_1 = 4/5$, $y_2 = 3/5$, 试应用对偶理论求原问题的解。

解：写出对偶问题：

$$\max\ w = 4y_1 + 3y_2$$
$$y_1 + 2y_2 \le 2 \quad ①$$
$$y_1 - y_2 \le 2 \quad ②$$
$$2y_1 + 3y_2 \le 5 \quad ③$$
$$y_1 + y_2 \le 2 \quad ④$$
$$3y_1 + y_2 \le 2 \quad ⑤$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

✓ 将 $y_1 = 4/5$, $y_2 = 3/5$的值代入，得知②③④为严格不等式，于是由互补松弛性，必有：

$$x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

✓ 又因 $y_1, y_2 > 0$，故原问题的两个约束条件必为紧约束，即有

$$x_1 + 3x_5 = 4$$
$$2x_1 + x_5 = 3$$

解得 $x_1 = x_5 = 1$ 即 $\boldsymbol{x}^* = (1,0,0,0,1)^T, z^* = 5$

南京大學 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

第二章 线性规划的对偶理论

3. 影子价格

3.1 对偶解的经济意义

$$z = c_B^T B^{-1} b + (c_N - c_B^T B^{-1} N) x_N \qquad (※)$$

$z = z(b)$ $\quad$ b为资源数

对(※)求偏导：

$$\frac{\partial z}{\partial b} = c_B^T B^{-1} = y^T$$

对偶解y：b的单位改变量所引起的目标函数值的改变量。

3.1 对偶解的经济意义

$$w = (y_1 \dots y_m)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m$$

b_i： 第 i 种资源的数量； y_i： 对偶解；

当 b_i 增加Δb_i, 其它资源数量不变时, 目标函数的增量

$$\Delta z = \Delta b_i y_i$$

y_i： 反映b_i 的边际效益(边际成本)

3.2 影子价格

由前面的经济解释可知, y_i的大小与系统内资源对目标的贡献有关，是资源的一种估价，称为影子价格。

(Shadow Price)

注：这种估价不是资源的市场价格。

市场价格是已知数，相对较稳定；而影子价格则有赖于资源的利用情况，是未知数。当企业的生产任务、产品结构等等发生变化时，资源的影子价格也会随之改变，它是一种动态价格。

3.3 影子价格的应用

① 影子价格的大小客观地反映了资源在系统内的稀缺程度

- 根据互补松弛定理的条件，如果某一资源在系统内供大于求，其影子价格就为零。
- 即增加该资源的供应不会引起系统目标的任何变化。
- 如果某一资源是稀缺资源（即相应约束条件的剩余变量为零），则影子价格必然大于零。
- 影子价格越高，资源在系统中越稀缺。

即某资源对偶解 >0 ，该资源有利可图，可增加此种资源量；某资源对偶解为0，则不增加此种资源量。

3.3 影子价格的应用

② 影子价格实际上是一种机会成本

- 在完全市场经济条件下，当某种资源的市场价格低于影子价格时，企业应买进该资源用于扩大再生产；
- 而当某种资源的市场价格高于影子价格时，企业应卖掉已有资源。
- 随着资源的买进卖出，其影子价格也将发生变化，一直到影子价格与市场价格保持同等水平时，才处于平衡。

即直接用影子价格与市场价格相比较，进行决策，是否买入该资源。

3.4 例子-1

某企业拟生产A、B两种产品，需利用一种原材料并经过车、刨两台机床加工，加工的工时定额、每天可用工时和原材料以及两种产品可能获得的利润如下表所示：

	单件产品的资源利用		每天可利用的资源
	产品A	产品B	
车床 刨床 原材料	1（小时/件） 0（小时/件） 3（公斤/件）	0（小时/件） 2（小时/件） 4（公斤/件）	8（小时） 12（小时） 36（公斤）
可获得利润（元/件）	3	5	

要求：1）拟定一个获利最大的生产计划；

2）若以单价0.8元再购入少量原材料投入生产是否合算？为什么？ 若决定购买，最多购入多少原材料？

假设现有 n 种物品，重量分别为 w_i，价值为 v_i，在总重量不超过载重限制 C 的情况下，如何填充背包可使总价值最高（每种物品可以只取走一部分，若只取走部分则价值也会等比例减少）。

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \quad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le C \\ x_i \ge 0, \forall i \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{对偶}}$$

$$\min\ Cy \quad \text{s.t.} \begin{cases} w_i y \ge v_i, \forall i \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \ge \dfrac{v_i}{w_i}, \forall i \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{互补松弛性}} \quad x_i\left(y - \frac{v_i}{w_i}\right) = 0, \forall i$$

- 若 $x_i > 0$，即填充该物品到背包中，则 $y = \frac{v_i}{w_i}$；又 $y \ge \frac{v_i}{w_i}, \forall i$，所以最佳方案是填充单位重量价值最大的物品。

例：无套利资产定价

Arbitrage–Free Asset Pricing

考虑一个有 n 种不同资产进行交易的市场。我们关注某一时期内资产的表现，显然表现会受到这一时期内事件的影响。为简单起见，我们假设在一个时期末有 m 种可能的状态。假设对于持有的每单位资产$i \in \{1, \ldots, n\}$，如果其期末状态为$s \in \{1, \ldots, m\}$，我们可以收到 r_{si} 美元的回报，即有下列$m \times n$的回报矩阵$\boldsymbol{R}$：

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

用$x_i \in \mathbb{R}$表示持有资产 i 的数量，如果 $x_i \geq 0$，那么在期末状态 s 发生的情况下，我们可以获得 $r_{si}x_i$ 美元；反之，如果 $x_i < 0$，那么对资产i，我们是空头，这意味着在期初我们卖出$|x_i|$ 单位的资产i，并承诺在期末回购。如果状态 s 发生，我们需要支付 $r_{si}|x_i|$ 美元，显然这等于收到回报 $r_{si}x_i$ 美元。

▷ 例：无套利资产定价

显然，给定初始投资组合 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$，在期末状态 s 实现的情况下，获得的财富回报是：

$$w_s = \sum_{i=1}^{n} r_{si} x_i$$

令 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$，那么 $\mathbf{w} = \boldsymbol{R}\mathbf{x}$。

金融学中最基本的问题之一是**确定期初资产价格**。

- 假设用 p_i 表示期初资产 i 的价格，令 $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$，那么投资组合 $\mathbf{x}$ 的成本就是 $\mathbf{p}^T\mathbf{x}$。
- 金融理论中一个**基本假设**是**价格不应产生套利机会**，即**没有投资者能从负投资中获取非负回报**。[A fundamental assumption in finance theory is that the prices at the beginning of the period should not give rise to arbitrage opportunities, i.e., no investor should be able to get a non-negative payoff (for any state) out of a negative investment.]

▷ 例：无套利资产定价

因此，**无套利假设可以表示为**：

$$\text{if } \boldsymbol{R}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \text{ then } \mathbf{p}^T\mathbf{x} \geq 0 \qquad (1)$$

那么，现在给定一个回报矩阵 $\boldsymbol{R}$，是否存在无套利的资产价格呢？即如何进行期初资产定价，才能保证无套利？

定理 当且仅当存在 $(q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}_+^m$ 使得资产 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 的价格为 $p_i = \sum_{s=1}^m q_s r_{si}$时，不存在套利机会（即条件 (1) 成立）。

证明：构造如下互为对偶的两个线性规划问题：

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{p}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{R}\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{0}^T\mathbf{q} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \mathbf{R}^T\mathbf{q} = \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array}$$

例：无套利资产定价

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{p}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.}\ & \mathbf{R}\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad \textbf{(a)}$$

$$\begin{aligned} \max\ & \mathbf{0}^T\mathbf{q} \\ \text{s.t.}\ & \begin{cases} \mathbf{R}^T\mathbf{q} = \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned} \quad \textbf{(b)}$$

首先，存在 $(q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{R}_+^m$ 使得资产 $i \in \{1, \dots, n\}$ 的价格为 $p_i = \sum_{s=1}^m q_s r_{si}$，即线性规划问题(b)有可行解，且任意可行解都是最优解，最优目标函数值就是零。如果$\mathbf{R}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$，即线性规划问题(a)也有可行解。根据**弱对偶定理**，对互为对偶的这两个问题的任意可行解 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{q}$，两者的目标函数值有如下关系：

$$\mathbf{p}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{0}^T\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

所以，无套利假设（即条件（1））成立。

反过来，如果不存在套利机会，即线性规划问题(a)有可行解，且最优目标函数值等于零。因此，其对偶问题(b)一定也有可行解。因为，如果(b)没有可行解，那么(a)的目标函数就没有下界，这和最优目标函数值等于零矛盾！