1.2 线性规划模型的一般形式

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

$$\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq (=, \leq)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq (=, \leq)\ b_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq (=, \leq)\ b_m \\ x_j \geq (\leq) 0,\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

1.3 线性规划模型的标准形式

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

$$\max \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0 \ , j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

其中 $b_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)$

1.3 线性规划模型的标准形式

- **非标准型 → 标准型**

（1） 目标函数

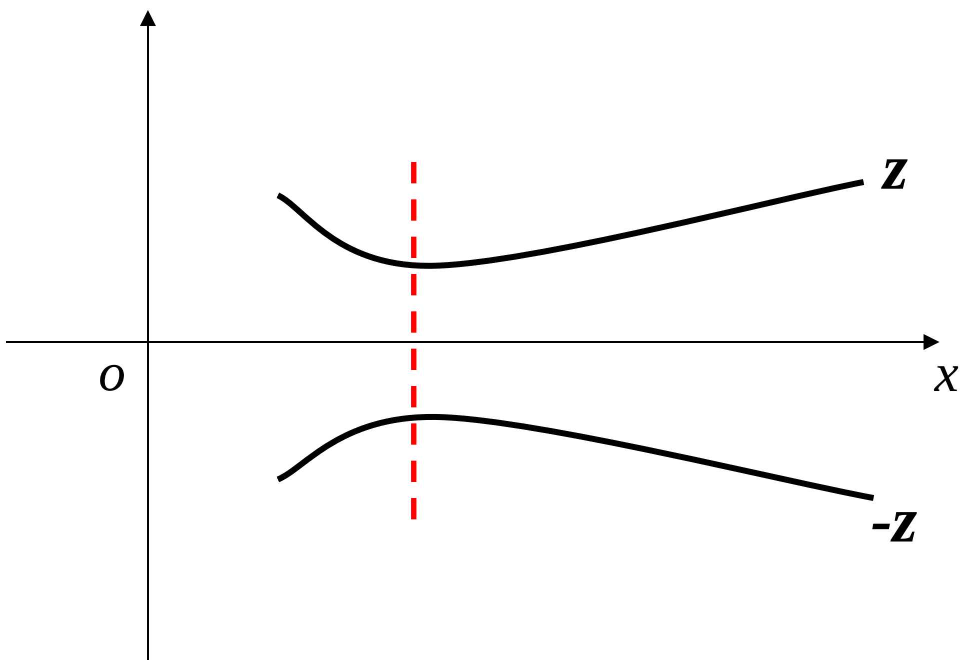
（2） 约束条件

（3） 决策变量

1.3 线性规划模型的标准形式

- **非标准型 → 标准型**

  - 目标函数



$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\boxed{令\ z' = -z}$$

$$\max\ z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

1.3 线性规划模型的标准形式

- **非标准型 → 标准型**
  - 约束条件

$$\max z = 40x_1 + 50x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 2x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 非标准型 → 标准型

  - 约束条件

$$\max z = 40x_1 + 50x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 60 \\ 2x_2 + x_5 = 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

x_3, x_4, x_5称为松弛变量(slack variables)

- **非标准型 → 标准型**
  - 约束条件

$$\min z = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4$$

$$s.t. \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 12 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 \geq 14 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 8 \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- **非标准型 → 标准型**

  - 约束条件

$$\min z = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 - x_6 = 14 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_7 = 8 \\ x_1, \ldots, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

x_5, x_6, x_7称为剩余变量(**surplus variables**)

- 非标准型 → 标准型

  - 决策变量

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 - 4x_2 \le 14 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{令 } \boldsymbol{x_1 = x_1' - x_1''}}$$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1' - 3x_1'' + 2x_2 \le 8 \\ x_1' - x_1'' - 4x_2 \le 14 \\ x_1', x_1'', x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 非标准型 → 标准型

  - 决策变量

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -6 \le x_1 \le 10 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered} -6 + 6 \le x_1 + 6 \le 10 + 6 \\ \text{令 } x_1{}' = x_1 + 6 \\ 0 \le x_1{}' \le 16 \end{gathered}}$$

$$s.t.\begin{cases} x_1{}' + x_2 \le 11 \\ x_1{}' \le 16 \\ x_1{}', x_2 \ge 0 \end{cases}$$

变换方法总结

- 目标函数为 min 型，价值系数一律反号，即令
$$z' = -z = -c^T x$$
- 第 i 个约束的 b_i 为负值，则该行左右两端系数同时反号，同时不等号也要反向。
- 第 i 个约束为 $\leq$ 型，在不等式左边增加一个非负的变量 x_{n+i}，称为松弛变量；同时令 $c_{n+i} = 0$。
- 第 i 个约束为 $\geq$ 型，在不等式左边减去一个非负的变量 x_{n+i}，称为剩余变量；同时令 $c_{n+i} = 0$。
- 若 $x_j \leq 0$，令 $x_j = -x_j'$，代入非标准型，则有 $x_j' \geq 0$。
- 若 x_j 正负不限，令 $x_j = x_j' - x_j''$，$x_j' \geq 0$，$x_j'' \geq 0$，代入非标准型。

✓ 练习：

请将下面的线性规划问题转换为标准形式。

$$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3\text{无限制} \end{cases}$$

解：① 令 $x_3 = x_4 - x_5$

② 加松弛变量 x_6

③ 加剩余变量 x_7

④ 令 $z' = -z$

$$\max z' = x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2 \\ x_1, x_2, \dots, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

1.4 线性规划模型的矩阵表示

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

$$\max\ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$s.t.\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

1.5 线性规划解的定义

Linear Programming
(LP)

$$\max\ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$s.t.\begin{cases}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & (1)\\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & (2)\end{cases}$$

- **定义1**

满足约束(1)，(2)的 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ 称为LP问题的**可行解**（*feasible solution*），**全部可行解**的集合称为**可行域**（*feasible region*）。

- **定义2**

使目标函数达到最优值的的可行解称为LP问题的**最优解**（*optimal solution*）。

第一章 线性规划

2. 图解法

- 最简单、直观的方法
- 但只适用有两个决策变量的情况

目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件

$$
s.t.\begin{cases}
x_1 + 2x_2 \le 8 \\
4x_1 \le 16 \\
4x_2 \le 12 \\
x_1, x_2 \ge 0
\end{cases}
$$

✓ Step 1：先绘制可行域，找到所有可行解

✓ Step 2：绘制目标函数等值线，平移等值线寻找最优解

2.1 线性规划的图解法

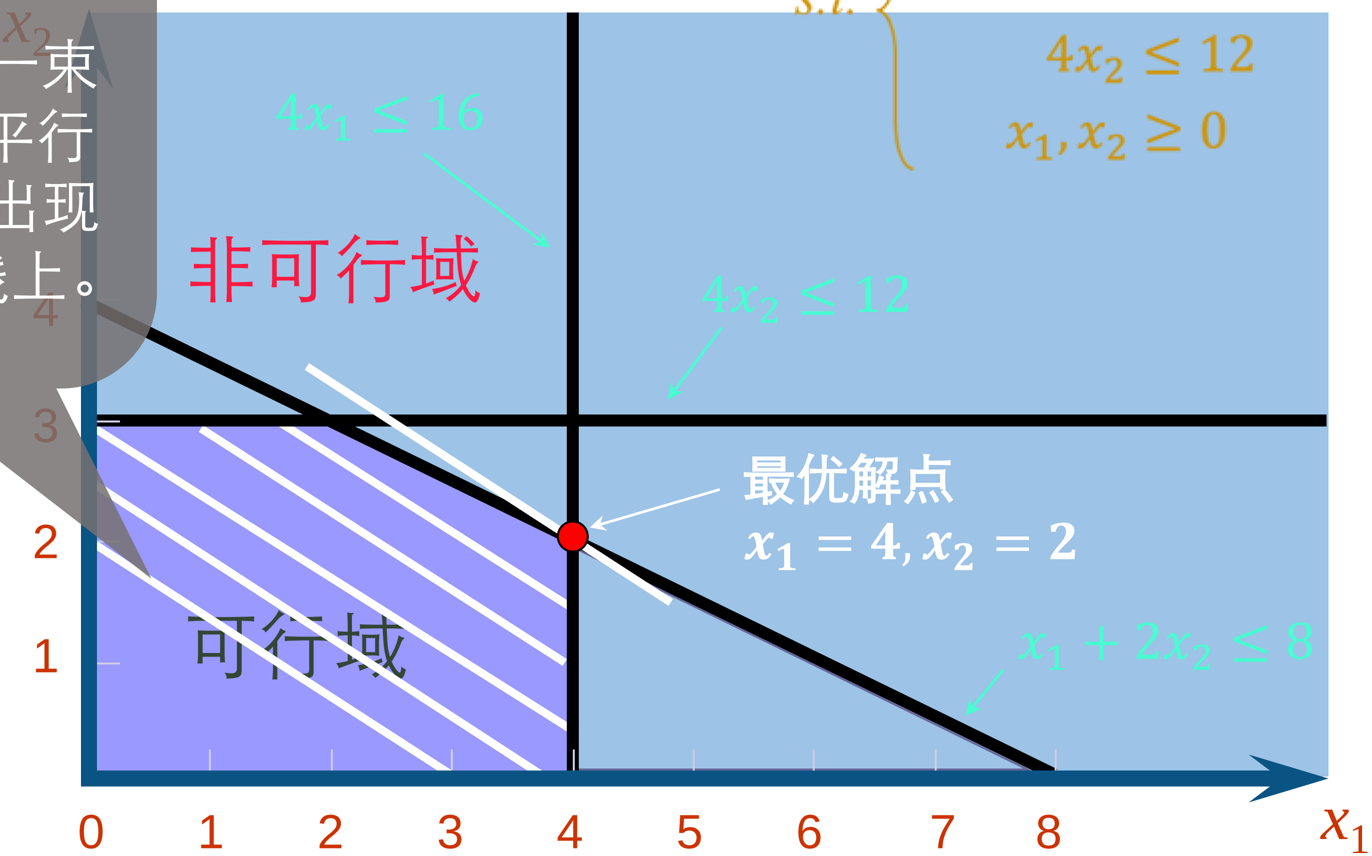
目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件 $s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$z = 2x_1 + 3x_2$ 即

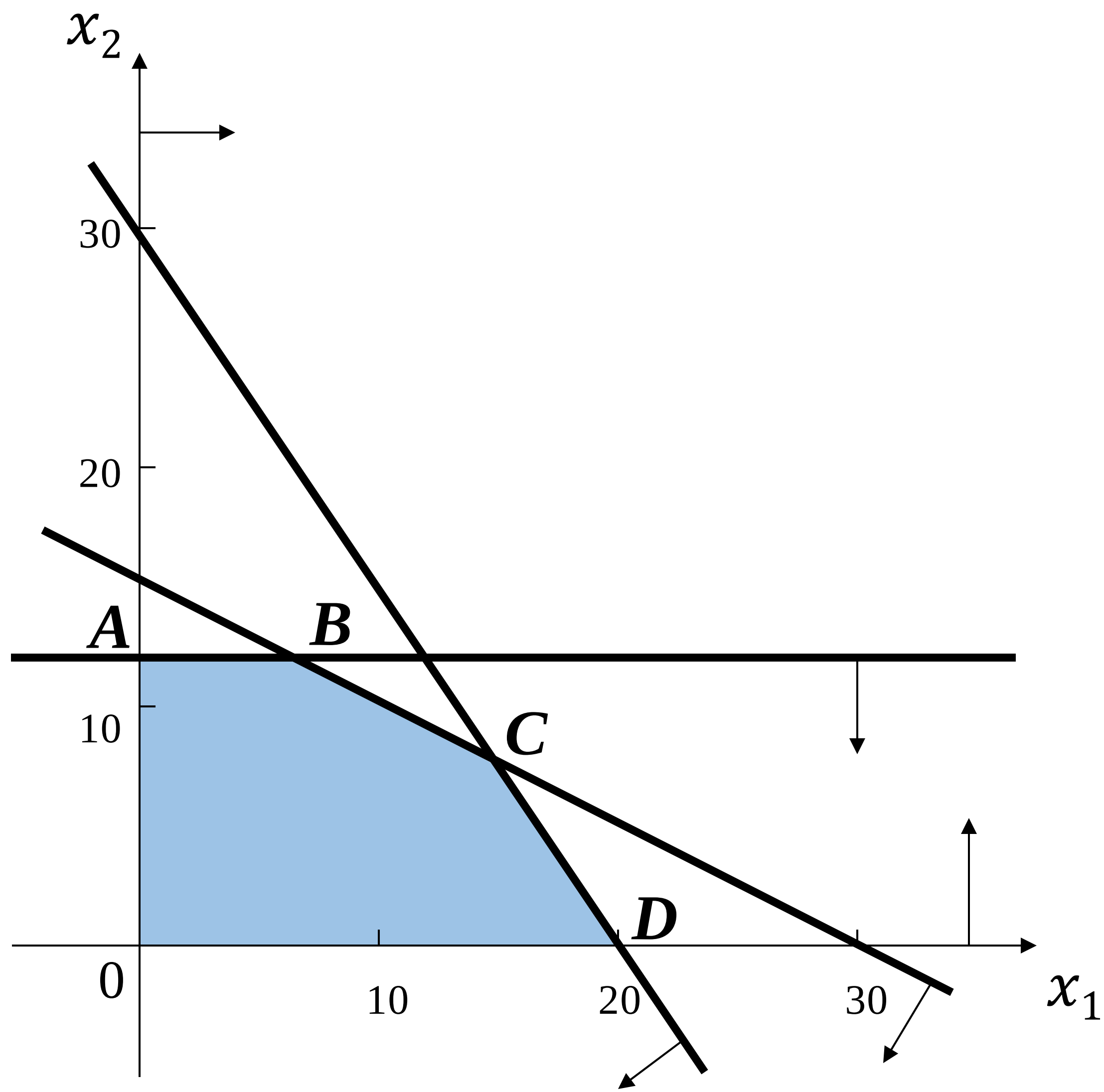
$x_2 = -2x_1/3 + z/3$

z取不同值时是一束斜率为$-2/3$的平行线，z的最大值出现在最高的一条线上。



$$\max z = 40x_1 + 50x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 30 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_2 \le 24 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



求最优解：

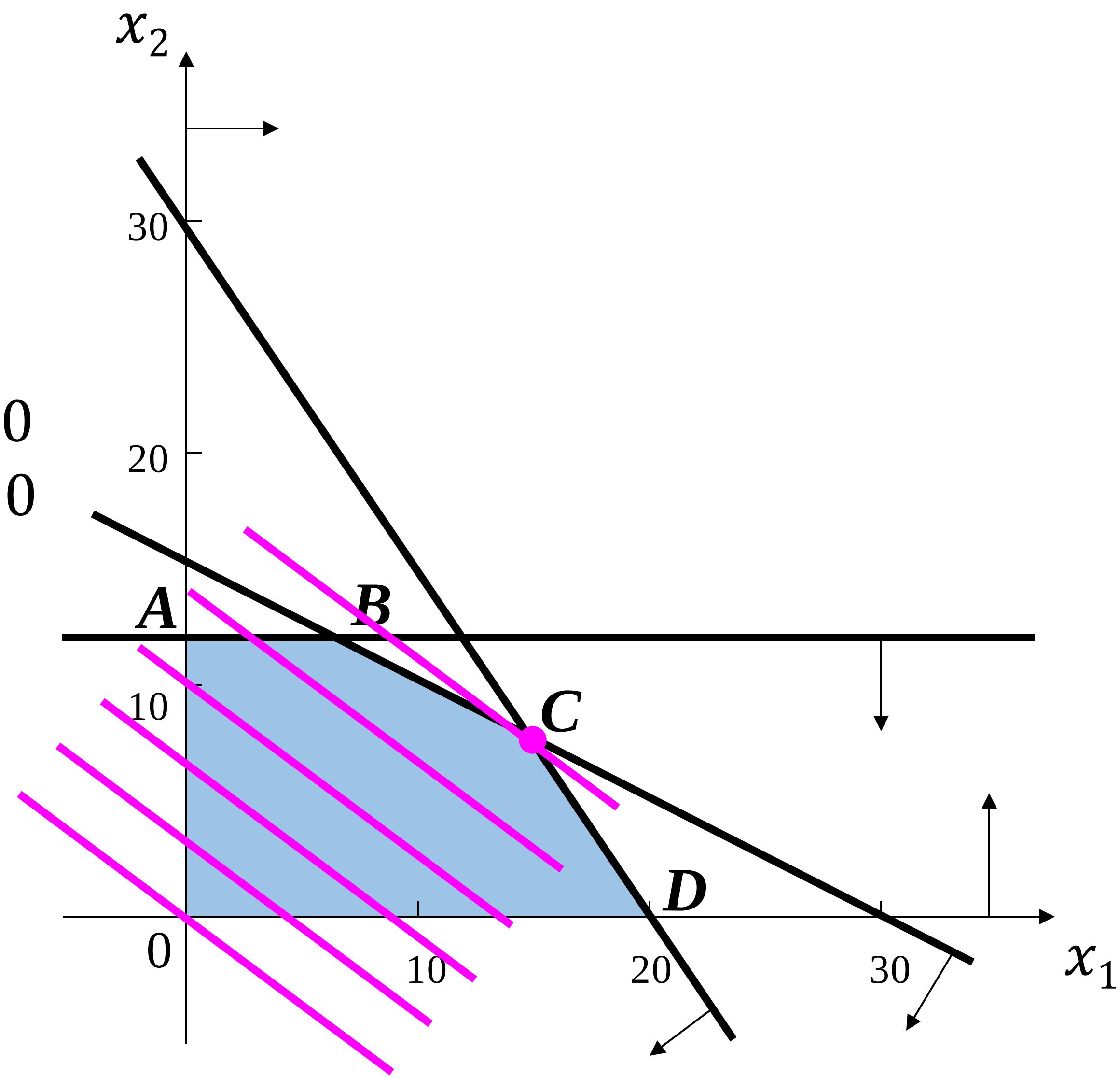
$$z = 40x_1 + 50x_2$$

$$0 = 40x_1 + 50x_2$$

C点：$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 30 \\ 3x_1 + 2x_2 = 60 \end{cases}$

解：$x^* = (15, 7.5)$

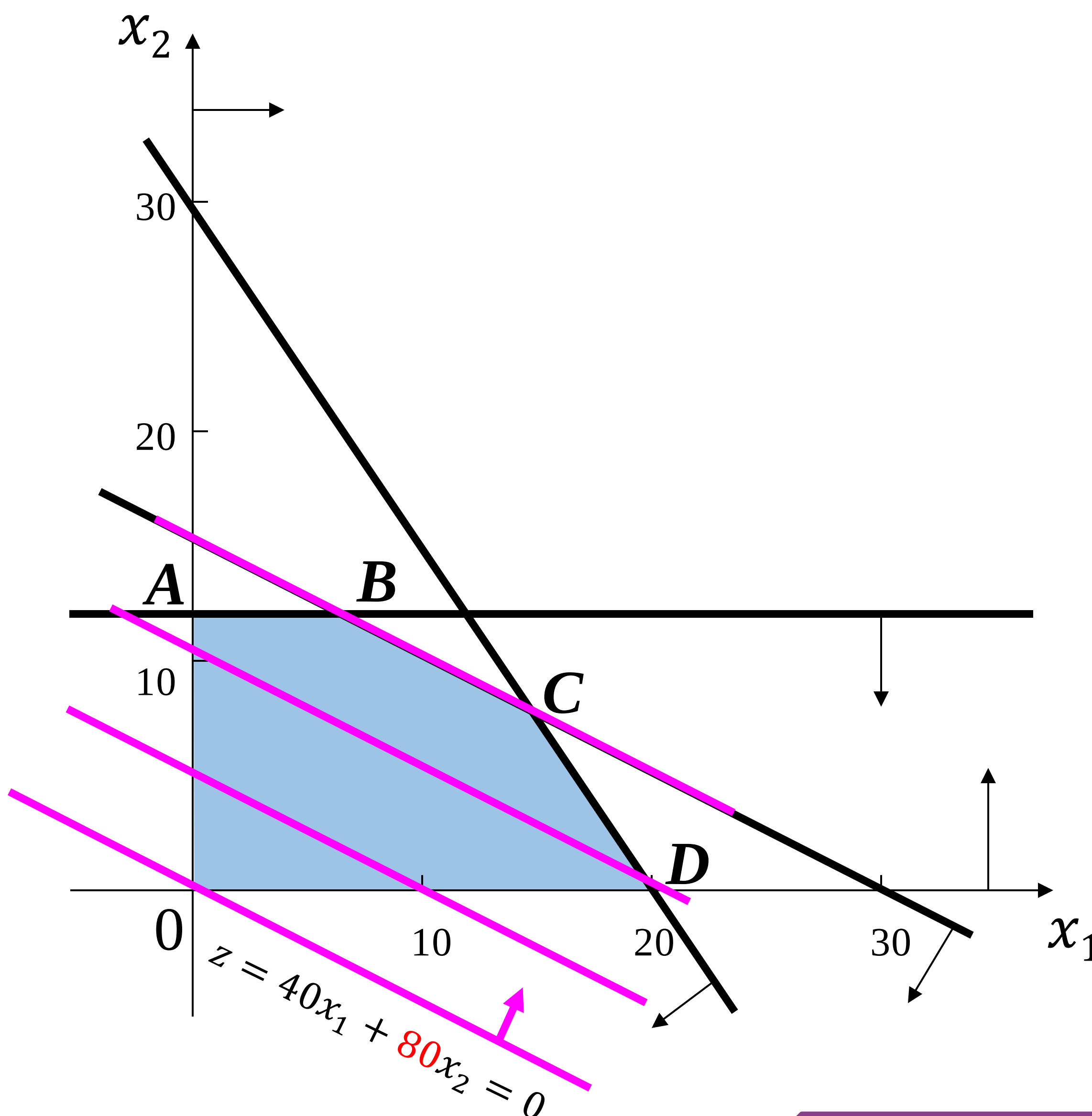
$z_{max} = 975$



2.2 线性规划最优解的可能结果

$$\max z = 40x_1 + 80x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 30 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_2 \le 24 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

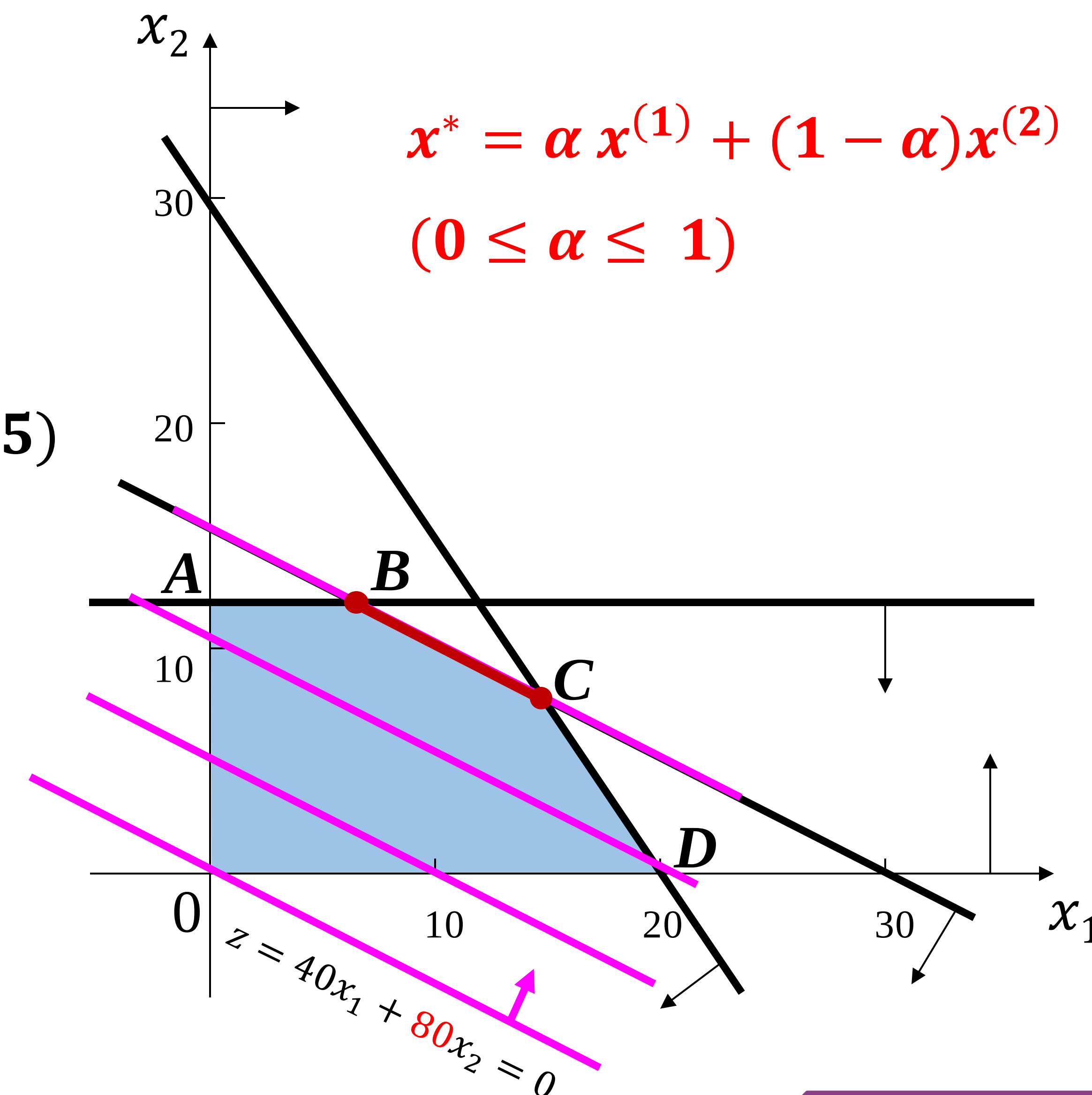


2.2 线性规划最优解的可能结果

最优解是 BC 线段

B点：$x^{(1)} = (6, 12)$

C点：$x^{(2)} = (15, 7.5)$



$$x^* = \alpha\, x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}$$

$$(0 \le \alpha \le 1)$$

2.2 线性规划最优解的可能结果

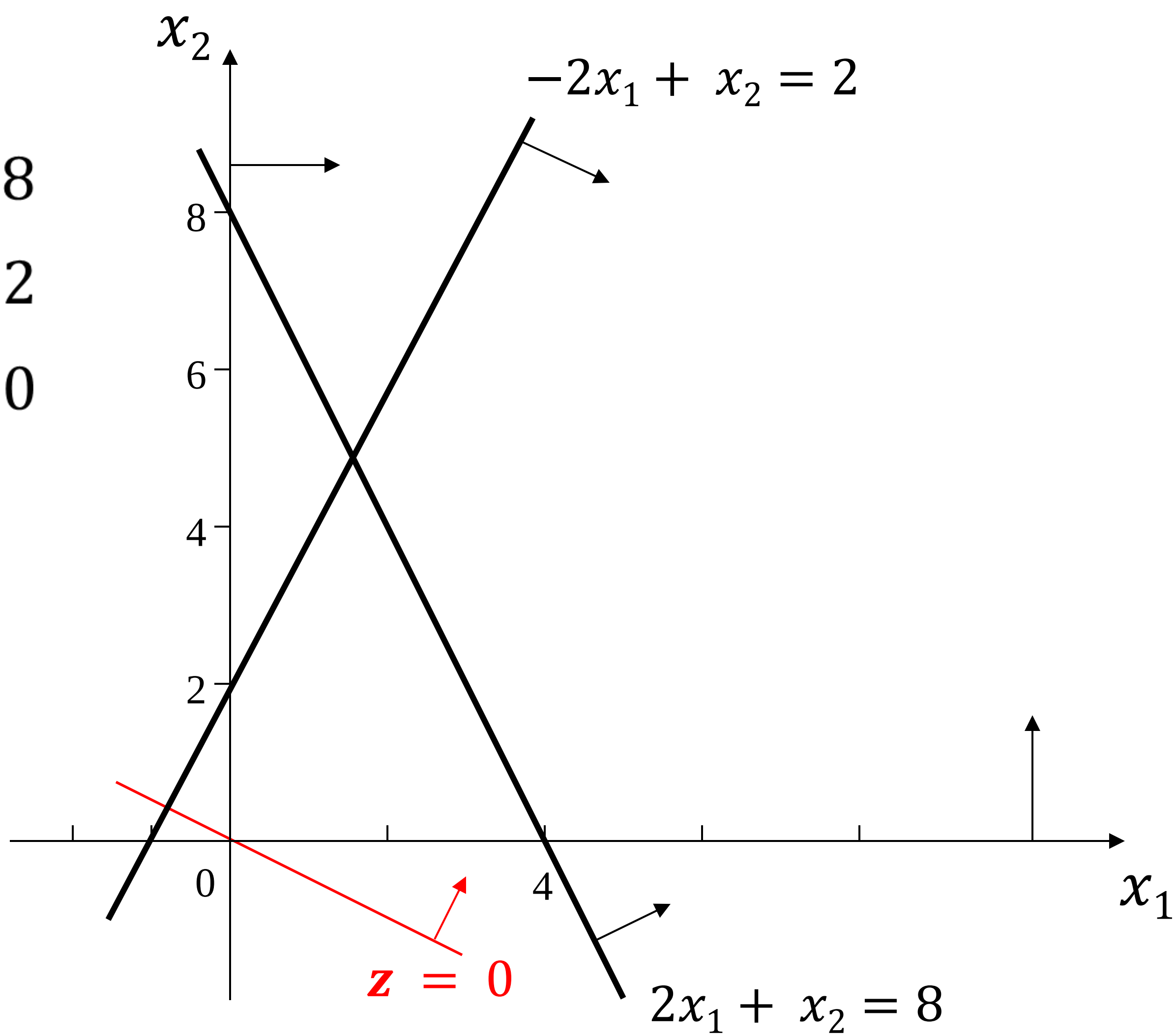
$$\max z = 2x_1 + 4x_2$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

无界解

(无有限最优解)

$z_{max} \to \infty$



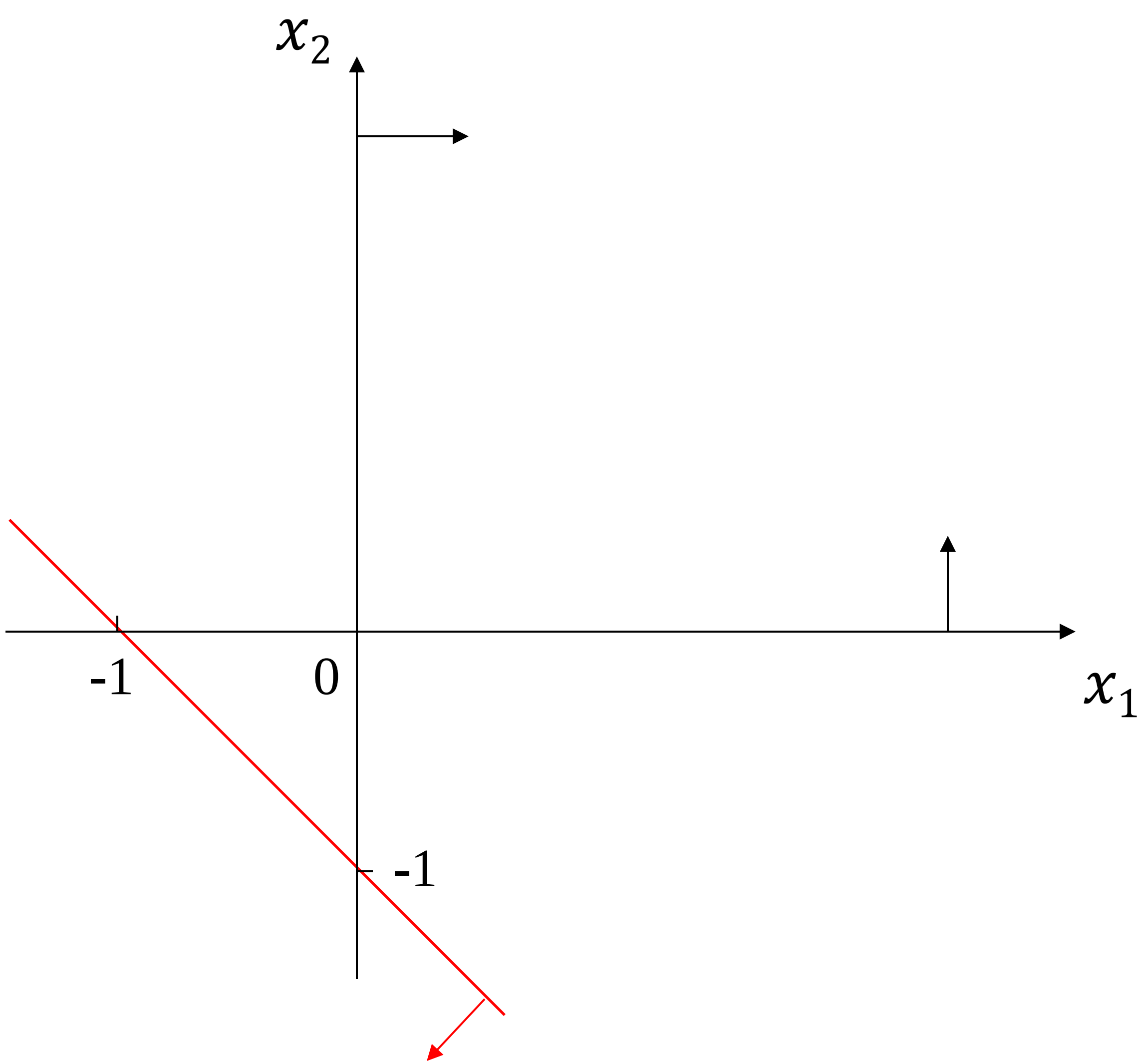
南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

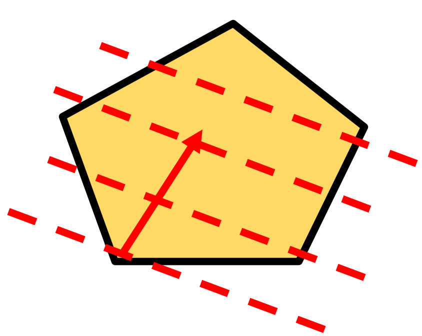
无解

(无可行解)

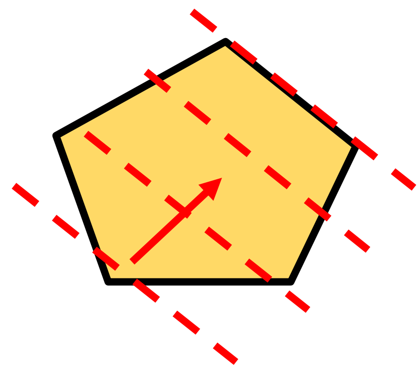


2.2 线性规划最优解的可能结果

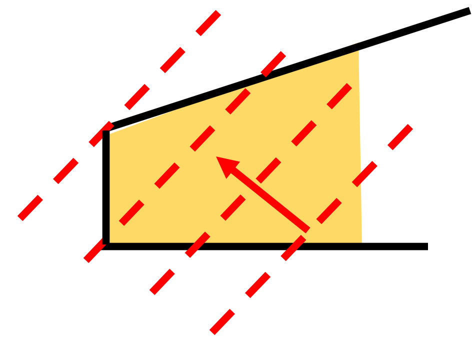
线性规划的可行域及最优解的可能结果图示：



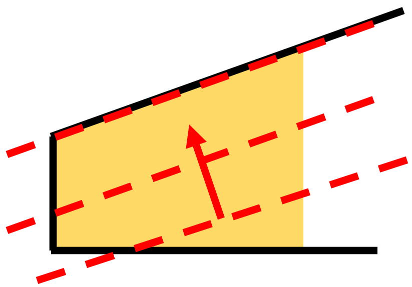
(a)可行域封闭，
唯一最优解



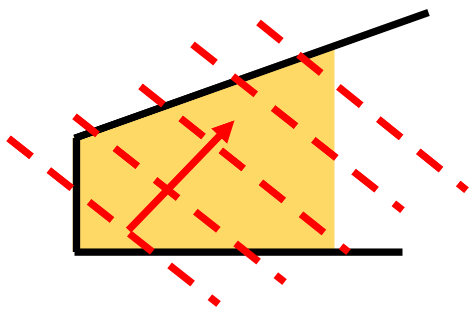
(b)可行域封闭，
多个最优解



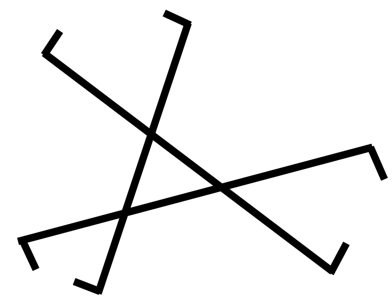
(c)可行域开放，
唯一最优解



(d)可行域开放，
多个最优解



(e)可行域开放，
目标函数无界



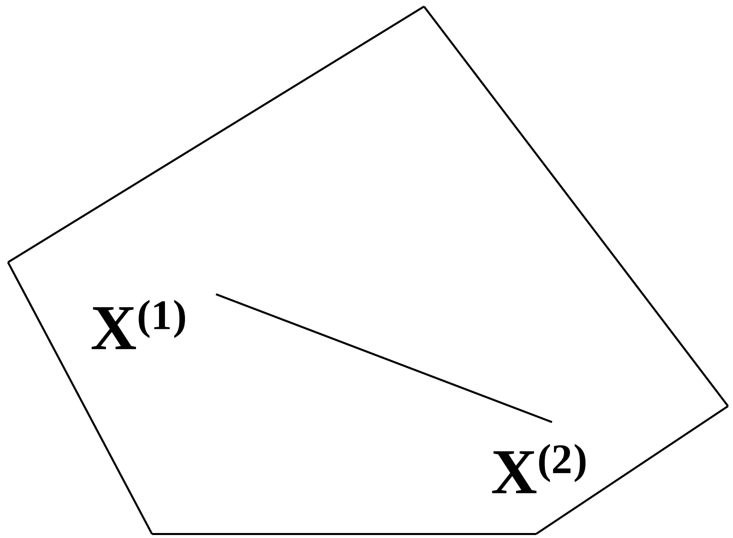
(f)可行域为空集

2.2 线性规划最优解的可能结果

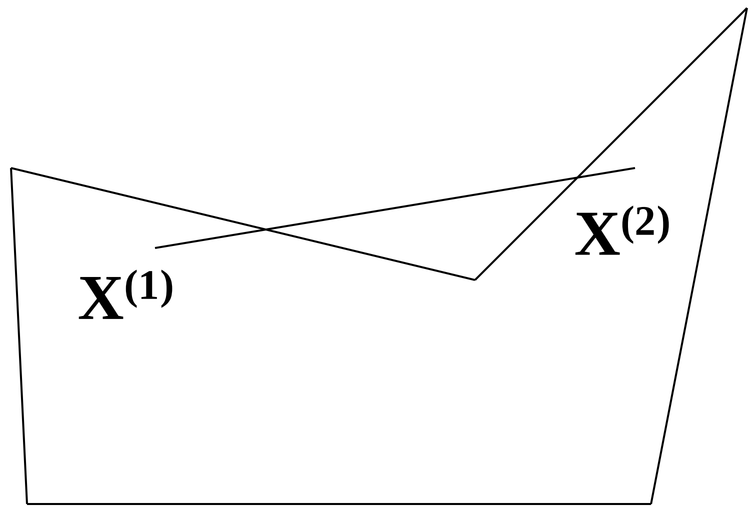
总结:

- 有解
  - 唯一解
  - 无穷多解
- 无解
  - 无有限最优解
  - 无可行解

- 可行域为凸多边形
- 若有最优解，一定在可行域的顶点达到



凸多边形



凹多边形

2.3 线性规划解的特性

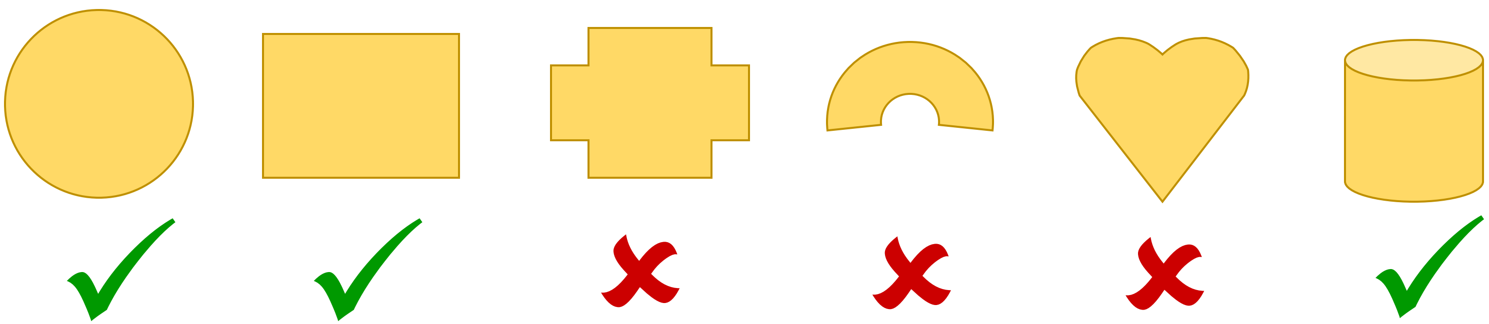
定义1: 【凸集】$\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 维欧氏空间上的一个集合

任取 $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)} \in \boldsymbol{D}$, 对任一个满足

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{X}^{(1)} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{X}^{(2)} \ (\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{1})$$

有 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{D}$

※ 凸集中任意两点的连线仍然属于该集合。



定义2:【凸组合】$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$是 n 维欧氏空间中的 k 个点, 若有一组数 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ 满足

$$0 \le \mu_i \le 1 \ (i = 1, \dots, k)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$$

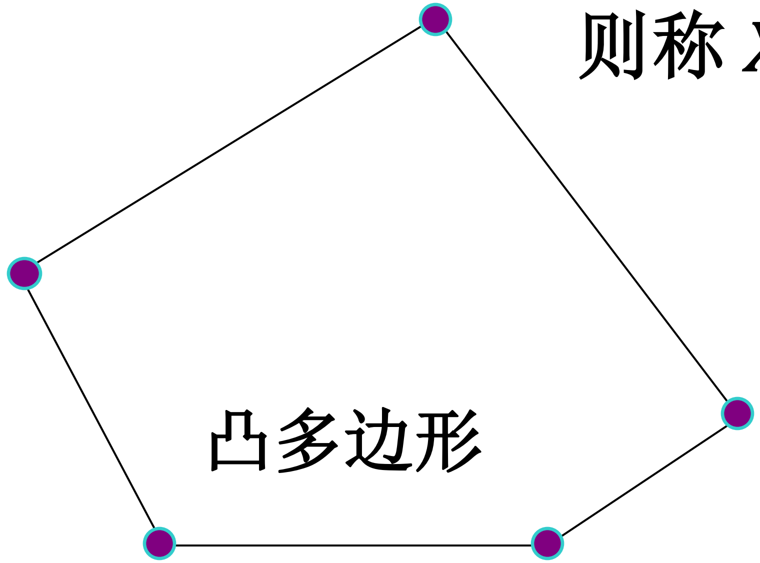
有点 $X = \mu_1 X^{(1)} + \mu_2 X^{(2)} + \cdots + \mu_k X^{(k)}$

则称点 X 为 $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$的凸组合。

定义3:【顶点】凸集 D, 点 $X \in D$，若找不到两个不同的点 $X^{(1)}, X^{(2)} \in D$ 使得:

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)} \quad (0<\alpha<1)$$

则称 X 为 D 的顶点。



（也称为极点 extreme point）

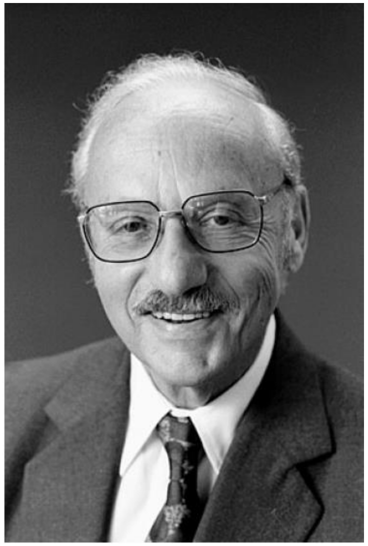
第一章 线性规划

3. 单纯形法原理

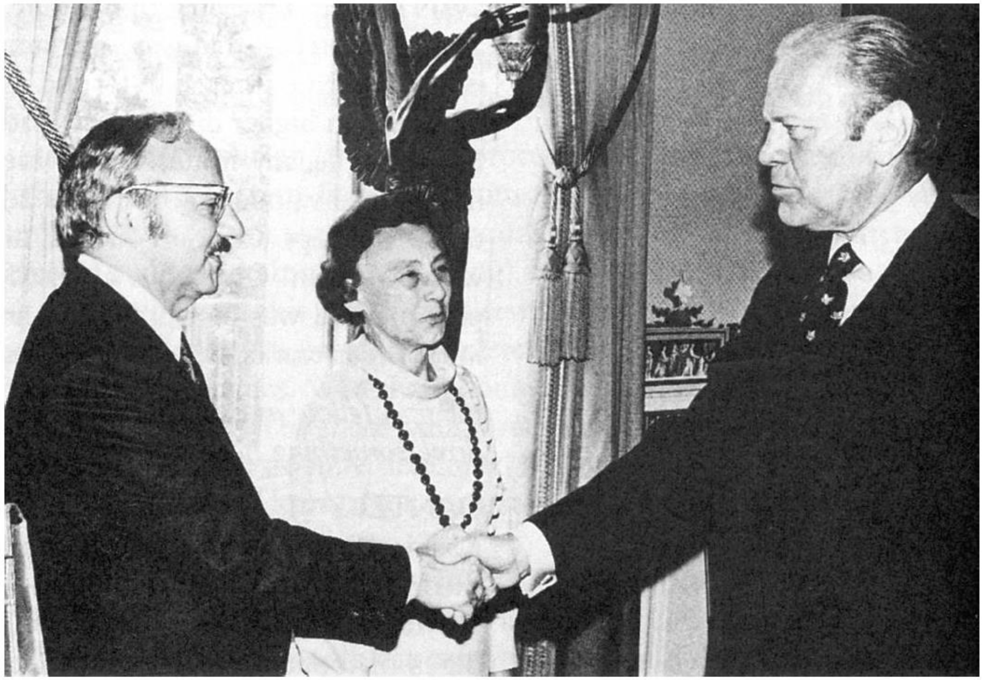
单纯形法的提出

- George Dantzig（1914-2005）

1947年提出求解线性规划的单纯形法



线性规划之父
美国科学院、美国工程院、美国人文与科学院三院院士



1975 National Medal of Science
（美国国家科学奖）

丹齐格的传奇故事

A Famous (and True!!) Story:

- Dantzig was a PhD student in Mathematics at UC-Berkeley working with Jerzy Neyman in mathematical statistics.
- Near the beginning of a class for which Dantzig was late, Professor Jerzy Neyman wrote two examples of famously unsolved statistics problems on the blackboard.
- When Dantzig arrived, he assumed that the two problems were a homework assignment and wrote them down. According to Dantzig, the problems "seemed to be a little harder than usual", but a few days later he handed in completed solutions for the two problems, still believing that they were an assignment that was overdue.

丹齐格的传奇故事

Story continued...

- Six weeks later, Dantzig received a visit from an excited professor Neyman, who was eager to tell him that the homework problems he had solved were two of the most famous unsolved problems in statistics. He had prepared one of Dantzig’s solutions for publication in a mathematical journal.

心灵捕手(1997年美国电影) - 百度百科

类型：电影作品

导演：格斯·范·桑特

简介：《心灵捕手》（Good Will Hunting）是一部励志剧情电影。影片由格斯·范·桑特执导，罗宾·威廉姆斯，马特·达蒙等主演。影...

剧情简介 演职员表 角色介绍 音乐原声 幕后花絮 更多 >

baike.baidu.com/

丹齐格的传奇故事

1948年，在威斯康星大学的一场会议上，Dantzig公开了通用线性规划模型及其求解所用的单纯形算法。这是他人生的决定性时刻。后来，他对这场报告津津乐道，经常说起当时的情形。

在一大群德高望重的数学家和经济学家面前，Dantzig是个前途无量的年轻后生，而他内心却忐忑不安。在报告后的讨论环节，Harold Hotelling 站起身来，只说了一句话："可我们都知道世界不是线性的。"无论从学术水平还是从身材上看，他都算是重量级人物。面对这么狠的批评，Dantzig一下子无言以对。突然听众中有一人举起了手，那是冯·诺依曼。他说："主席，如果报告者不介意的话，我愿意替他回答。"

冯·诺依曼说："报告者把题目定为'线性规划'，在陈述原理的时候也很谨慎。你的应用要是满足他的原理，那就用他的模型；要是不满足，那就不用呗。"

$$\max\ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{s.t.}\quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} & a_{2m+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & a_{mm+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\mathbf{P}_1 \ \cdots\ \mathbf{P}_m}_{\mathbf{B}} \quad \underbrace{\mathbf{P}_{m+1}\ \cdots\ \mathbf{P}_n}_{\mathbf{N}}$$

$m \times m$ 满秩子矩阵

$\boxed{A_{m\times n}\text{行满秩}}$

$(m < n)$ $rank(A) = m$ [至少有一个m阶子式不为0]

<u>定义4:</u>【基 (基阵)】 若 A 中一个 $m \times m$ 子矩阵 B 是可逆矩阵，则称方阵 B 为 LP 问题的一个基。

$$A = (P_1 \ \dots \ P_m \ \vdots \ P_{m+1} \ \dots \ P_n) = (B \ \ N)$$

基向量　　非基向量

B　　N

$$\mathbf{x} = (x_1 \ \dots \ x_m \ \vdots \ x_{m+1} \ \dots \ x_n)^T = (\mathbf{x}_B \ \mathbf{x}_N)^T$$

基变量　　非基变量

$\mathbf{x}_B$　　$\mathbf{x}_N$

Ax = b 的求解

$$A = (B\ N) \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x}_B\ \mathbf{x}_N)^T$$

$$(B\ N)\begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \quad B\mathbf{x}_B + N\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

$$B\mathbf{x}_B = \mathbf{b} - N\mathbf{x}_N$$

$$\boxed{\mathbf{x}_B = B^{-1}b - B^{-1}N\mathbf{x}_N}$$

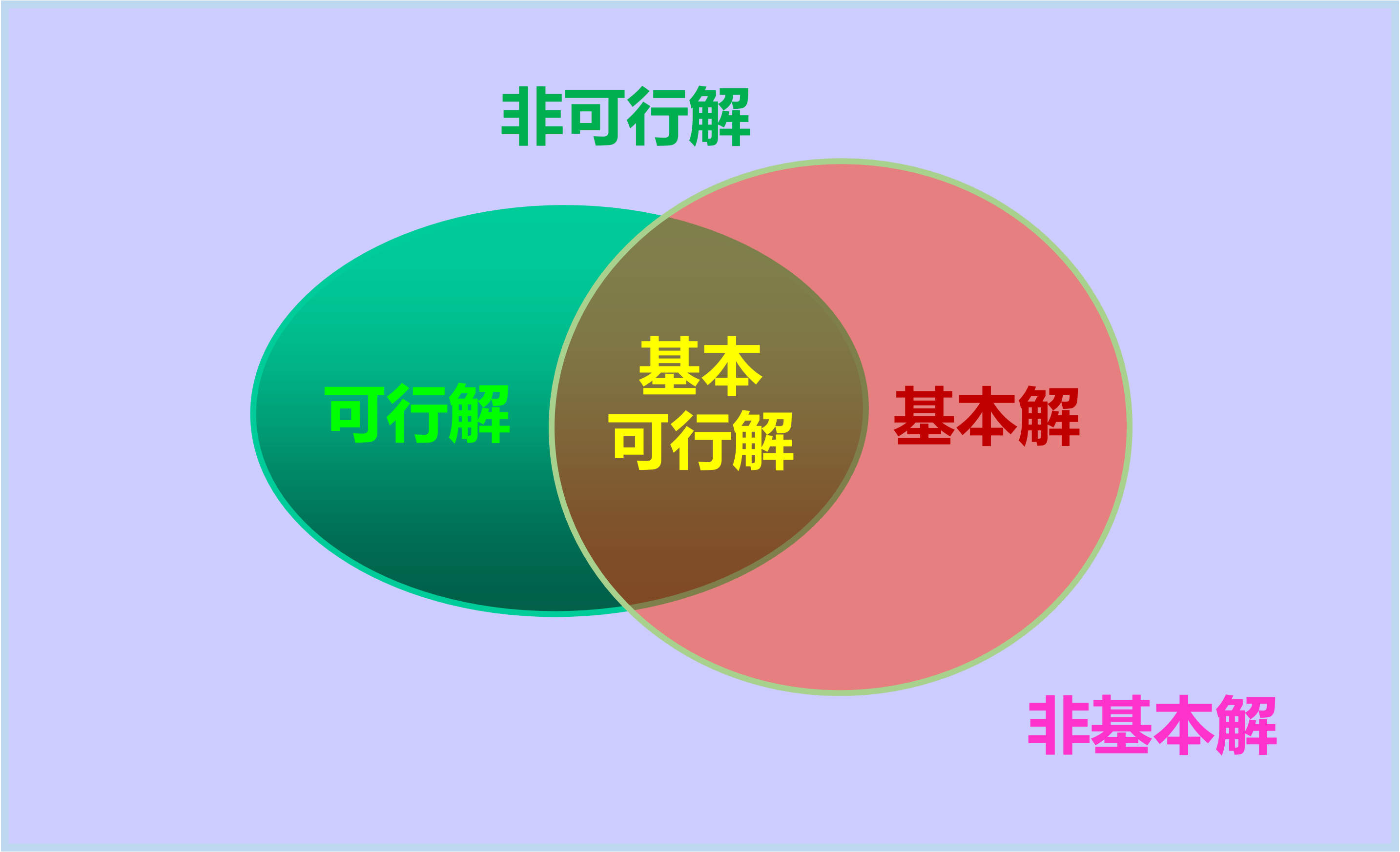
<u>定义5:</u>【基本解】对应于基 B，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 为 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一个解。

<u>定义6:</u>【基本可行解】基 B，基本解 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

若 $B^{-1}b \geq 0$，称基 B 为可行基。若其基本解是最优解，成为最优基本解，相应的基为最优基。

✓ 基本解中最多有m个非零分量; 基本解的数目 $\leq C_n^m$

3.1 线性规划的基本解



例：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 15 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 18 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

化为标准型 →

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 18 \\ x_1 - x_2 + x_3 + \quad + x_6 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

3.1 线性规划的基本解

$$
\begin{aligned}
\boxed{x_1} \ \boxed{+3x_2} \ \boxed{+x_3} + x_4 \qquad\qquad &= 15 \\
\boxed{2x_1} \ \boxed{+3x_2} \ \boxed{-x_3} \qquad + x_5 \qquad &= 18 \\
\boxed{x_1} \ \boxed{-\ x_2} \ \boxed{+x_3} \qquad\qquad + x_6 &= 3
\end{aligned}
$$

基变量 $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3}$，非基变量 $\boldsymbol{x_4, x_5, x_6}$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 &= 15 \\
2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 18 \\
x_1 - x_2 + x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

基本解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (5, 3, 1, 0, 0, 0)$$

是基本可行解，表示可行域的一个极点。

目标函数值为：$z = 20$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 15 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \quad + x_5 \quad &= 18 \\ x_1 - x_2 + x_3 \quad + x_6 &= 3 \end{aligned}$$

基变量x_1, x_2, x_4，非基变量x_3, x_5, x_6

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_4 &= 15 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 18 \\ x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

基本解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (27/5, 12/5, 0, 2/5, 0, 0)$$

是基本可行解，表示可行域的一个极点。

目标函数值为：$z = 18$

3.1 线性规划的基本解

$$
\begin{aligned}
\boxed{x_1} \ \boxed{+3x_2} + x_3 + x_4 \qquad\quad &= 15 \\
\boxed{2x_1} \ \boxed{+3x_2} - x_3 \qquad \boxed{+x_5} \quad &= 18 \\
\boxed{x_1} \ \boxed{-\ x_2} + x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 3
\end{aligned}
$$

基变量x_1, x_2, x_5，非基变量x_3, x_4, x_6

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 \qquad &= 15 \\
2x_1 + 3x_2 + x_5 &= 18 \\
x_1 - x_2 \qquad &= 3
\end{aligned}
$$

基本解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6, 3, 0, 0, -3, 0)$$

是基本解，但不是可行解，不是一个极点。

3.1 线性规划的基本解

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 15 \\
2x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 18 \\
x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 3
\end{aligned}
$$

基变量x_1, x_2, x_6，非基变量x_3, x_4, x_5

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 \qquad &= 15 \\
2x_1 + 3x_2 \qquad &= 18 \\
x_1 - x_2 + x_6 &= 3
\end{aligned}
$$

基本解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (4, 4, 0, 0, 0, 4)$$

是基本可行解，表示可行域的一个极点。

目标函数值为：$z = 18$

练习：给定约束条件

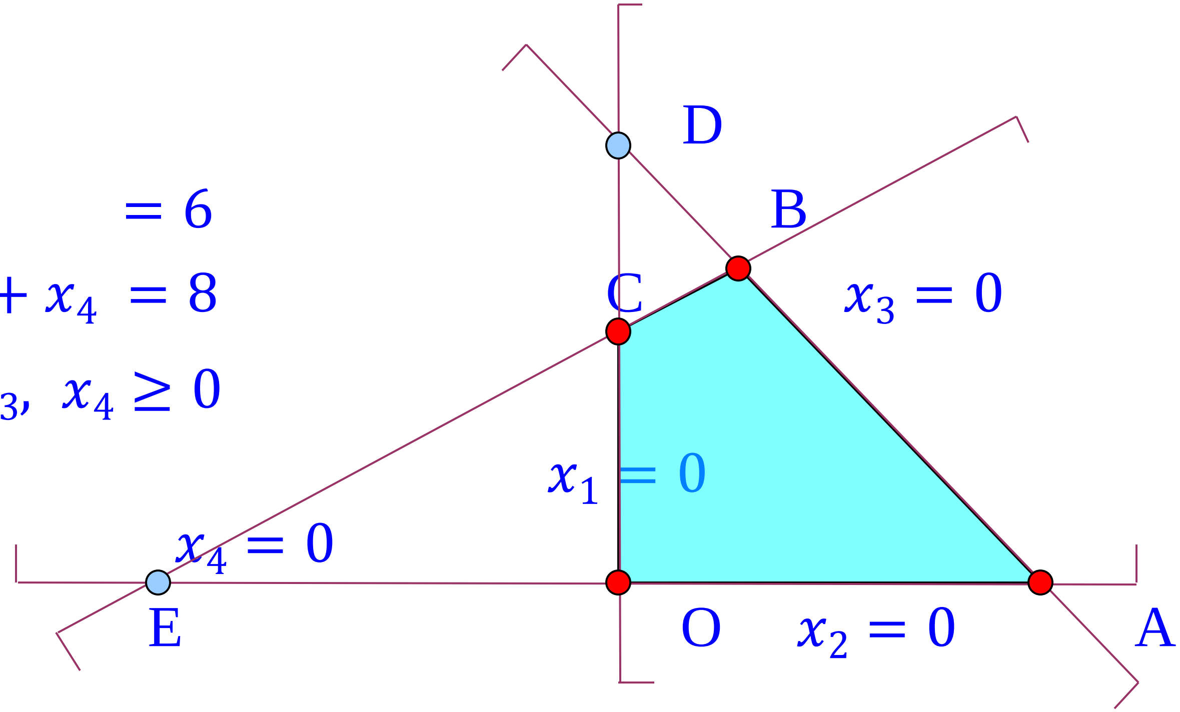
$$\begin{cases} -x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_j \geq 0\ (j = 1,2,3,4) \end{cases}$$

求出基变量是$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4}$的基本解。请问其是否是可行解？

3.1 线性规划的基本解

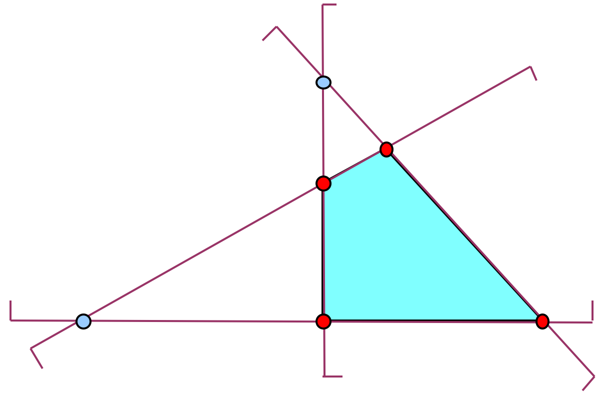
$$\max \quad z = x_1 + 3x_2$$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 6 \\
-x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 8 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$



	O	A	B	C	D	E
基变量	x_3 x_4	x_1 x_4	x_1 x_2	x_2 x_3	x_2 x_4	x_1 x_3
非基变量	x_1 x_2	x_2 x_3	x_3 x_4	x_1 x_4	x_1 x_3	x_2 x_4
$x_j<0$	--	--	--	--	x_4	x_1
基可行解	是	是	是	是	否	否

几何概念		代数概念
约束直线	⇨	满足一个等式约束的解
约束半平面	⇨	满足一个不等式约束的解
约束半平面的交集：凸多边形	⇨	满足一组不等式约束的解
约束直线的交点	⇨	基本解
可行域的极点	⇨	基本可行解
目标函数等值线：一组平行线	⇨	目标函数值等于一个常数的解



3.2 LP问题解的基本定理

- 若(LP)问题有可行解，则可行解集（可行域）是凸集，有有限个顶点。
- (LP)问题的基本可行解 $\Leftrightarrow$ 可行域的顶点。
- 若(LP)问题有最优解，则必定可以在基本可行解（顶点）处达到。

3.2 LP问题解的基本定理

- 若(LP)问题有可行解，则可行解集（可行域）是凸集，有有限个顶点。

证明：

- (LP)问题的**基本可行解** $\Leftrightarrow$ 可行域的**顶点**。

引理：线性规划问题的可行解 $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)^T$ 为基本可行解的**充要条件**是 $\mathbf{x}$ 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

证明：$\Longrightarrow$ 由基本可行解定义显然成立；

$\Longleftarrow$ 若向量 $P_1, P_2, \dots, P_k$ 线性独立，则必有$k \le m$；

（1）"$k=m$" 恰好构成一个基；

（2）“$k<m$” 一定可以从其余列向量中找出 $(m-k)$ 个与 $P_1, P_2, \dots, P_k$ 构成一个基，其对应的解恰为 $\mathbf{x}$。

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

- (LP)问题的基本可行解 $\Leftrightarrow$ 可行域的顶点。

反证法

(1) $\mathbf{x}$ 不是基本可行解 $\Longrightarrow$ $\mathbf{x}$ 不是可行域的顶点

假设 $\mathbf{x}$ 的前 m 个分量为正：$\sum_{j=1}^{m} x_j P_j = b$

由引理，$P_1, P_2, \ldots, P_m$线性相关，即

$$\delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 + \cdots + \delta_m P_m = 0$$

$$(x_1 + \mu\delta_1)P_1 + (x_2 + \mu\delta_2)P_2 + \cdots + (x_m + \mu\delta_m)P_m = b$$

$$(x_1 - \mu\delta_1)P_1 + (x_2 - \mu\delta_2)P_2 + \cdots + (x_m - \mu\delta_m)P_m = b$$

$$x_i \pm \mu\delta_i \geq 0 \Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} = \{x_i + \mu\delta_i\} \in \Omega, \mathbf{x}^{(2)} = \{x_i - \mu\delta_i\} \in \Omega$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)})$$

- (LP)问题的基本可行解 $\Leftrightarrow$ 可行域的顶点。

反证法

(2) x不是可行域的顶点 $\Longrightarrow$ x不是基本可行解

可以找到可行域内另外两个不同的点 **y** 和 **z**：

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + (1-\alpha)\mathbf{z} \quad (0 < \alpha < 1)$$

设 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$，当$x_j = 0$时，必有$y_j = z_j = 0$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \sum_{j=1}^{r} P_j x_j = b \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} P_j y_j = \sum_{j=1}^{r} P_j y_j = b$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j z_j = \sum_{j=1}^{r} P_j z_j = b$$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{r}(y_j - z_j)P_j = 0$, $y_j - z_j$不全为零, P_j线性相关

- 若(LP)问题有最优解，则必定可以在基本可行解（顶点）达到。

证明：设 $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ 是线性规划的一个最优解。

若 $\mathbf{x}^{(0)}$ 不是基本可行解，则 $\mathbf{x}^{(0)}$ 不是顶点，那么可以找到另两个点 $\mathbf{x}^{(0)} \pm \mu\boldsymbol{\delta} \geq 0$。

代入目标函数：$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(0)} \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(0)} \pm \mu\mathbf{c}^T\boldsymbol{\delta} \Rightarrow \mu\mathbf{c}^T\boldsymbol{\delta} = 0$。

如果 $\mathbf{x}^{(0)} \pm \mu\boldsymbol{\delta}$ 仍然都不是基本可行解，按上面的方法继续做下去，最后一定可以找到一个基本可行解，且目标函数值等于$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(0)}$。

单纯形法的基本思路：

从一个初始的基本可行解出发，经过判断，如果是最优解，则结束；否则经过基变换得到另一个改善的基本可行解，如此一直进行下去，直到找到最优解。

(1) 确定初始基本可行解

(2) 最优性检验和解的判别

(3) 从一个基本可行解转换到相邻的基本可行解

单纯形法解释：

例：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z = 40x_1 + 50x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 60 \\
& 2x_2 + x_5 = 24 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

解：（1）确定初始可行解

$$B_1 = (P_3\ P_4\ P_5) = I$$

$$\begin{cases} z = 0 + 40x_1 + 50x_2 \\ x_3 = 30 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 60 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 24 - 2x_2 \end{cases}$$

令 $x_1 = x_2 = 0$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (0,0,30,60,24)^T,\ z^{(1)} = 0$$

（2）判定解是否最优

$$z = 0 + 40x_1 + 50x_2$$

当 x_1 从0 ↗ 或 x_2 从0 ↗ 时，z 从0 ↗

$\therefore \ \mathbf{x}^{(1)}$ 不是最优解

(3) 由一个基可行解 → 另一个基可行解。

$\because$ 50 > 40 $\therefore$ 选x_2从0 ↗，$x_1 = 0$

$$\begin{cases} x_3 = 30 - 2x_2 \geq 0,\ x_2 \leq \frac{30}{2} \\ x_4 = 60 - 2x_2 \geq 0,\ x_2 \leq \frac{60}{2} \\ x_5 = 24 - 2x_2 \geq 0,\ x_2 \leq \frac{24}{2} \end{cases}$$

$$x_2 = \min\left(\frac{30}{2}, \frac{60}{2}, \frac{24}{2}\right) = 12$$

x_2进基变量，x_5出基变量。

$$B_2 = (P_3\ P_4\ P_2)$$

$$\begin{cases} z = 0 + 40x_1 + 50x_2 & ④ \\ x_3 + 2x_2 = 30 - x_1 & ① \\ x_4 + 2x_2 = 60 - 3x_1 & ② \\ 2x_2 = 24 - x_5 & ③ \end{cases}$$

③×$\frac{1}{2}$，③代入④式，①−③，②−③

$$\begin{cases} z = 600 + 40x_1 - 25x_5 \\ x_3 = 6 - x_1 + x_5 \\ x_4 = 36 - 3x_1 + x_5 \\ x_2 = 12 - {}^1/_2\, x_5 \end{cases}$$

令$x_1 = x_5 = 0$

$\mathbf{x}^{(2)} = (0,12,6,36,0)^T$

$z^{(2)} = 600$

(2)′ 判断

$\because\ 40 > 0 \quad \therefore\ \mathbf{x}^{(2)}$不是最优解

(3)′ 选 x_1从 $0\nearrow$，$x_5 = 0$

$$\begin{cases} x_3 = 6 - x_1 \geq 0 \\ x_4 = 36 - 3x_1 \geq 0 \\ x_2 = 12 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \min\left(\frac{6}{1}, \frac{36}{3}\right) = 6$$

x_1进基，x_3出基。

$$B_3 = (P_1\ P_4\ P_2)$$

$$\begin{cases} z = 840 - 40x_3 + 15x_5 \\ x_1 = 6 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 18 + 3x_3 - 2x_5 \\ x_2 = 12 - {}^1\!/_2\, x_5 \end{cases}$$

令 $x_3 = x_5 = 0$

$$\mathbf{x}^{(3)} = (6,12,0,18,0)^T,\ \ z^{(3)} = 840$$

(2)'' $\because\ 15 > 0 \quad \therefore\ \mathbf{x}^{(3)}$不是最优解

(3)'' 选 $\boldsymbol{x_5}$ 从 $\mathbf{0} \nearrow$，$\boldsymbol{x_3} = \mathbf{0}$

$$\begin{cases} x_1 = 6 + x_5 \geq 0 \\ x_4 = 18 - 2x_5 \geq 0 \\ x_2 = 12 - {}^1/_2\, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_5 = \min\left(\frac{18}{2}, \frac{18}{1/2}\right) = 9$$

x_5进基，x_4出基。

3.3 单纯形法迭代原理

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

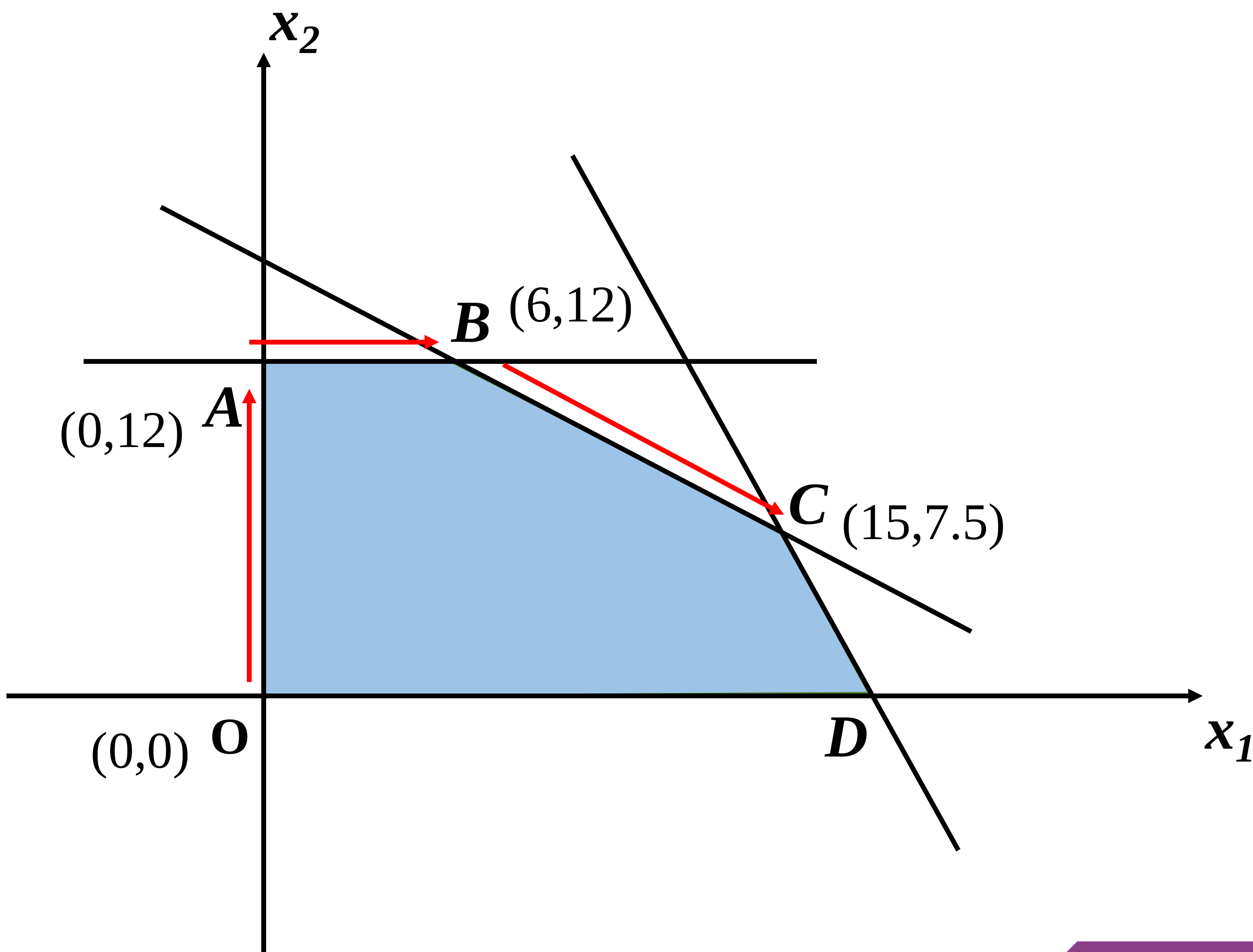
$$B_4 = (P_1\ P_5\ P_2)$$

$$\begin{cases} z = 975 - {}^{35}/_{2}\,x_3 - {}^{15}/_{2}\,x_4 \\ x_1 = 15 + {}^{1}/_{2}\,x_3 - {}^{1}/_{2}\,x_4 \\ x_5 = 9 + {}^{3}/_{2}\,x_3 - {}^{1}/_{2}\,x_4 \\ x_2 = {}^{15}/_{2} - {}^{3}/_{4}\,x_3 + {}^{1}/_{4}\,x_4 \end{cases}$$

令$x_3 = x_4 = 0$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \left(15, \frac{15}{2}, 0, 0, 9\right)^T,\quad z^{(4)} = 975$$

3.3 单纯形法迭代原理



(1) 确定初始基本可行解

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.\ \sum_{j=1}^{n} x_j P_j = b$$

$$x_j \geq 0 (j = 1, \ldots, n)$$

一般约束条件的变量系数矩阵中总会存在一个单位矩阵：

$$(P_1, P_2, \ldots, P_m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)^T = (b_1, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)^T$$

(1) 确定初始基本可行解

例如，通过建模得到的一般线性规划模型如下：

$$\max\ z = 2x_1 - x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\max\ z = 2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

因此，$(0,0,15,12,6)^T$是一个初始基本可行解。

(2) 最优性检验和解的判别

将基本可行解 $\mathbf{x}^{(0)}$ 代入目标函数得：

$$z^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x}_B &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N \\ z &= \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \left(\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\right)\boldsymbol{x}_N \end{aligned}}$$

令 $\boldsymbol{\sigma}_j = \left(\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\right)_j \begin{cases} \le 0, \forall j & \rightarrow \text{是最优解} \\ > 0, \exists j & \rightarrow \text{不是最优解} \end{cases}$

"检验数"或"判别数"

3.3 单纯形法迭代原理

(3) 从一个基本可行解转换到相邻的基本可行解

仅变换一个基变量

- 进基变量的确定

根据 $\sigma_k = \max_j\{\sigma_j | \sigma_j > 0\}$，确定 x_k 为进基变量。

- 出基变量的确定

原则是保持解的可行性，也就是说，要使原基本可行解的某一个正分量变为零，同时保持其余分量为非负。

(3) 从一个基本可行解转换到相邻的基本可行解

假设现有基本可行解 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,0,\cdots 0)^T$, 则

$$\boxed{\begin{gathered} x_1^0\mathbf{p}_1+x_2^0\mathbf{p}_2+\cdots+x_m^0\mathbf{p}_m=\mathbf{b} \\ \mathbf{p}_k=a_{1k}\mathbf{p}_1+a_{2k}\mathbf{p}_2+\cdots+a_{mk}\mathbf{p}_m \end{gathered}}$$

$$\Downarrow$$

$$(x_1^0-\theta a_{1k})\mathbf{p}_1+(x_2^0-\theta a_{2k})\mathbf{p}_2+\cdots+(x_m^0-\theta a_{mk})\mathbf{p}_m+\theta\mathbf{p}_k=\mathbf{b}$$

要保证 $\boldsymbol{x}^{(1)}=(x_1^0-\theta a_{1k},x_2^0-\theta a_{2k},\cdots,x_m^0-\theta a_{mk},0,\cdots,\theta,\cdots,0)^T$是一个基本可行解, 必须

$$x_i^0-\theta a_{ik}\geq 0 \implies \theta=\min_i\left\{\frac{x_i^0}{a_{ik}}\middle| a_{ik}>0\right\}=\frac{x_l^0}{a_{lk}}$$

- 旋转运算

$$P_l \leftrightarrow P_k$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
P_1 & P_2 & \cdots & P_{l-1} & P_k & P_{l+1} & \cdots & P_m & b \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{l-1,k} & 0 & \cdots & 0 & b_{l-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{lk} & 0 & \cdots & 0 & b_l \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{l+1,k} & 1 & \cdots & 0 & b_{l+1} \\
 & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{mk} & 0 & \cdots & 1 & b_m
\end{array}\right]
$$

旋转主元
（Pivot Element）

进行初等变换
形成单位矩阵