最大流的对偶问题

- 最大流问题的线性规划模型：

$$\max \ W$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{(s,j)\in A} f_{sj} - \sum_{(j,s)\in A} f_{js} = W \\ \sum_{(t,j)\in A} f_{tj} - \sum_{(j,t)\in A} f_{jt} = -W \\ \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} f_{ji} = 0, i \neq s, t \\ \quad 0 \le f_{ij} \le c_{ij} \end{cases}$$

- 对偶问题是求最小割吗？

最大流的对偶问题

- 改写最大流问题的线性规划模型：

$$\max \sum_{(s,j)\in A} f_{sj}$$

u_k (流平衡约束的对偶变量)

$\downarrow$

$$s.t. \sum_{(i,k)\in A} f_{ik} - \sum_{(k,j)\in A} f_{kj} = 0, \forall k \in N, k \neq s,t$$

$$f_{ij} \le c_{ij}, \forall (i,j) \in A \quad \leftarrow y_{ij}$$ (容量限制约束的对偶变量)

$$f_{ij} \ge 0, \forall (i,j) \in A$$

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij}$$

$$\begin{aligned} s.t.\ & u_j + y_{sj} \ge 1, \forall (s,j) \in A \\ & u_j - u_i + y_{ij} \ge 0, \forall (i,j) \in A, i \neq s, j \neq t \\ & -u_i + y_{it} \ge 0, \forall (i,t) \in A \\ & y_{ij} \ge 0, u_i \text{自由} \end{aligned}$$

最大流的对偶问题

- 最大流问题的对偶问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij} \\
s.t. \quad & u_j + y_{sj} \geq 1 \\
& u_j - u_i + y_{ij} \geq 0 \\
& -u_i + y_{it} \geq 0 \\
& y_{ij} \geq 0, u_i \text{自由}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij} \\
s.t. \quad & y_{sj} \geq 1 - u_j, \forall (s,j) \in A \\
& y_{ij} \geq u_i - u_j, \forall (i,j) \in A, i \neq s, j \neq t \\
& y_{it} \geq u_i - 0, \forall (i,t) \in A \\
& y_{ij} \geq 0, u_i \text{自由}
\end{aligned}
$$

- 最终的等价模型：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij} \\
s.t. \quad & y_{ij} \geq u_i - u_j,\ y_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in A \\
& u_s = 1, u_t = 0
\end{aligned}
$$

最大流的对偶问题

- 可进一步写为：

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}[u_i - u_j]_+$$

$$s.t.\ \ u_s = 1, u_t = 0$$

- 其对应流网络上的最小割问题。
- $S = \{i, u_i = 1\}, T = \{i, u_i = 0\}$ 两个集合定义了一个割。
- $S \subseteq V, T = V - S,$ 且 $s \in S, t \in T$。割(S,T)的容量定义

$$C(S,T) = \sum_{i\in S,\, j\in T} c_{ij}$$

- 结合上述线性规划的全幺模性（Totally-unimodularity），可得原问题和对偶问题最优值相等，即最大流-最小割定理。

第七章 图与网络

5. 最小费用流问题

5.1 最小费用流—模型

- 给定网络$G=(V,A,C,d)$和经过网络的流量$W(f)=v$，求流在网络上的最佳分布，使总费用最小。

$$\min \quad d(f)=\sum_{(i,j)\in A} d_{ij}f_{ij}$$

$$\sum_{(s,j)\in A} f_{sj}-\sum_{(j,s)\in A} f_{js}=v$$

$$\sum_{(t,j)\in A} f_{tj}-\sum_{(j,t)\in A} f_{jt}=-v$$

$$\sum_{(i,j)\in A} f_{ij}-\sum_{(j,i)\in A} f_{ji}=0, i\neq s,t$$

$$0\le f_{ij}\le C_{ij}$$

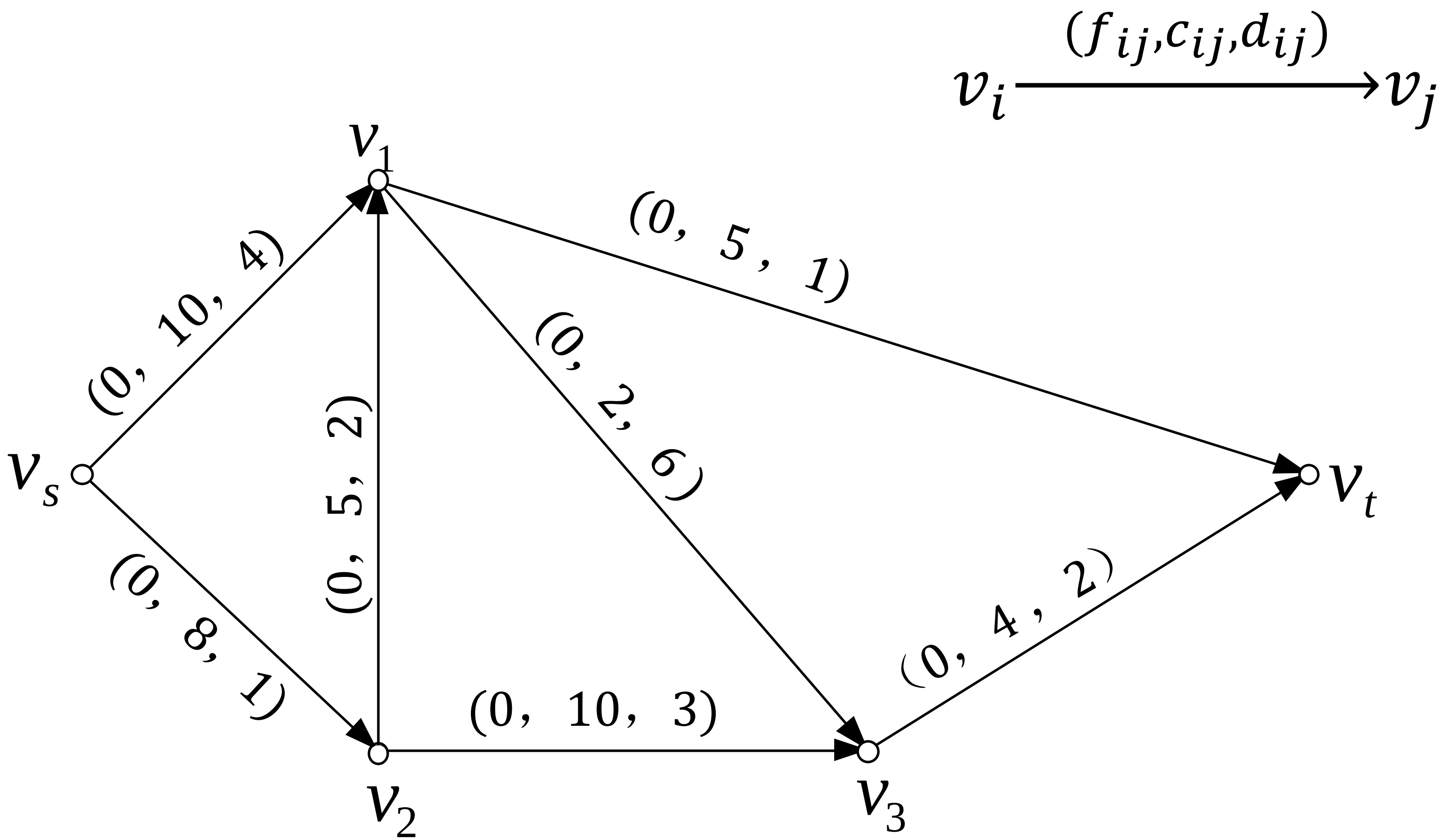
5.2 最小费用增广链

- 增广链费用，最小费用增广链。
- 对于最小费用可行流，沿最小费用增广链调整流，可使流增加，并保持流费用最小。
- 给定初始最小费用可行流，求最小费用增广链，若存在，则沿该增广链调整网络流，直到达到给定的网络流或不存在增广链为止，后一种情况为最小费用最大流。
- 若给定网络流超过最大流，则不可能实现。

5.2 最小费用增广链

- 生成最小费用可行流的剩余网络：
  - 将饱和弧反向
  - 将非饱和非零流弧加一反向弧
  - 零流弧不变
  - 所有前向弧的权为该弧的费用，后向弧的权为该弧费用的相反数
- 剩余网络又叫长度网络
- 最小费用增广链对应剩余网络的最短路

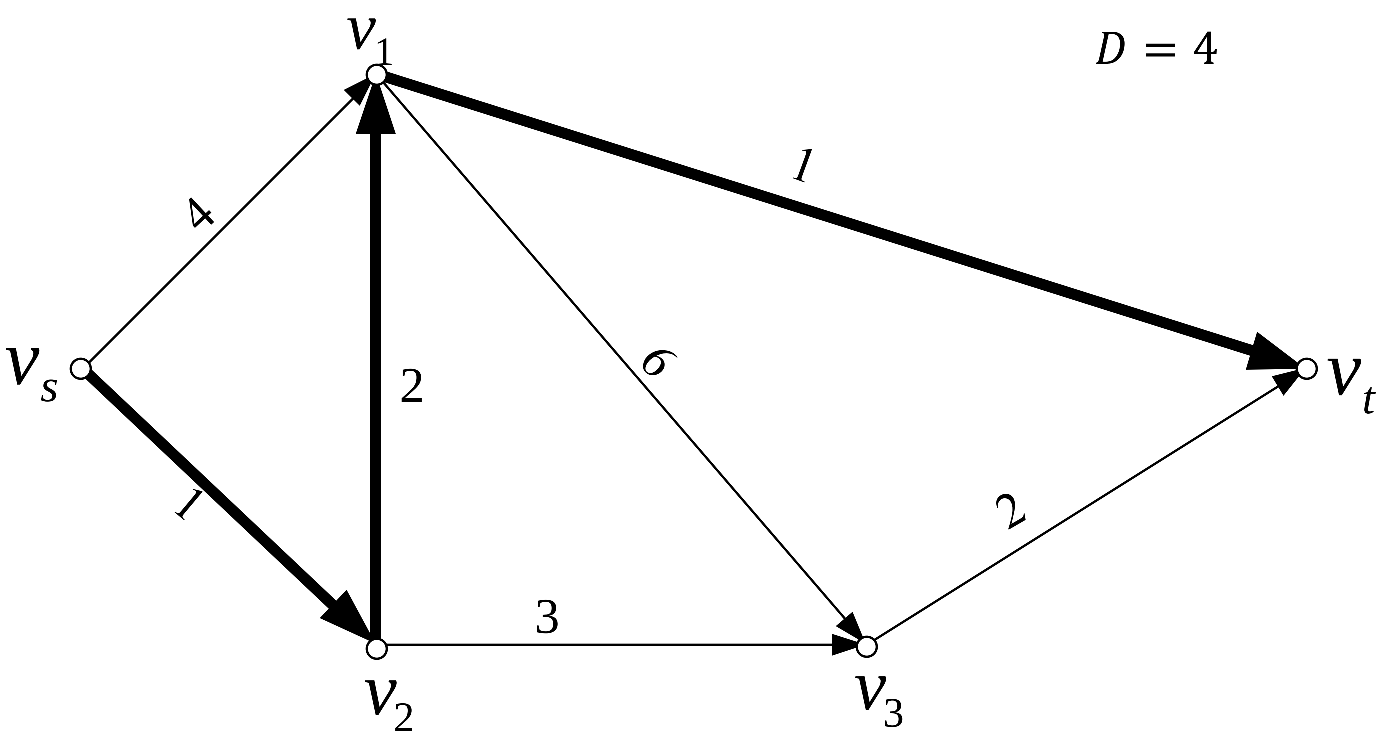
5.3 最小费用流—例题


$v_i \xrightarrow{(f_{ij}, c_{ij}, d_{ij})} v_j$
v_s
v_1
v_2
v_3
v_t
(0, 10, 4)
(0, 8, 1)
(0, 5, 2)
(0, 2, 6)
(0, 5, 1)
(0, 10, 3)
(0, 4, 2)

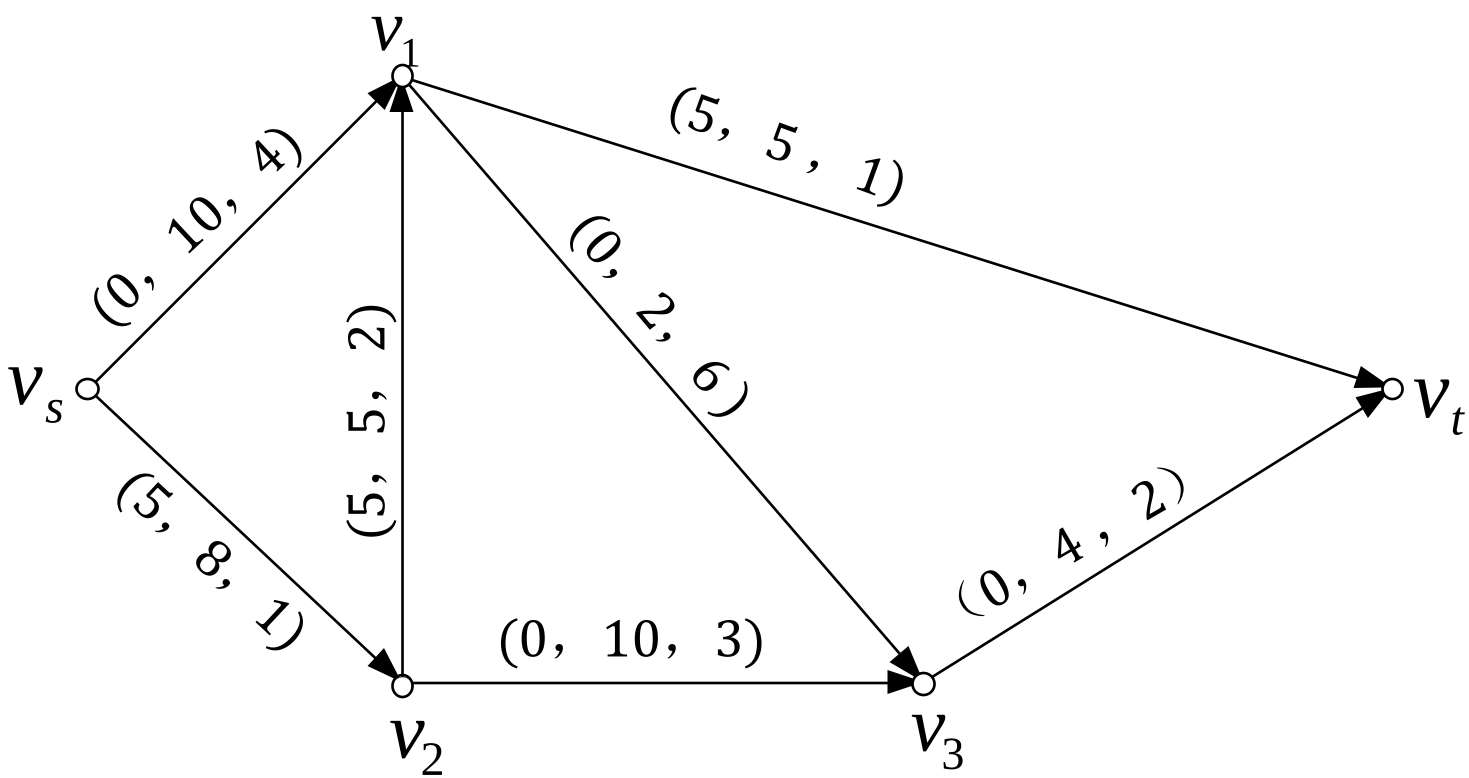
5.3 最小费用流—例题

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

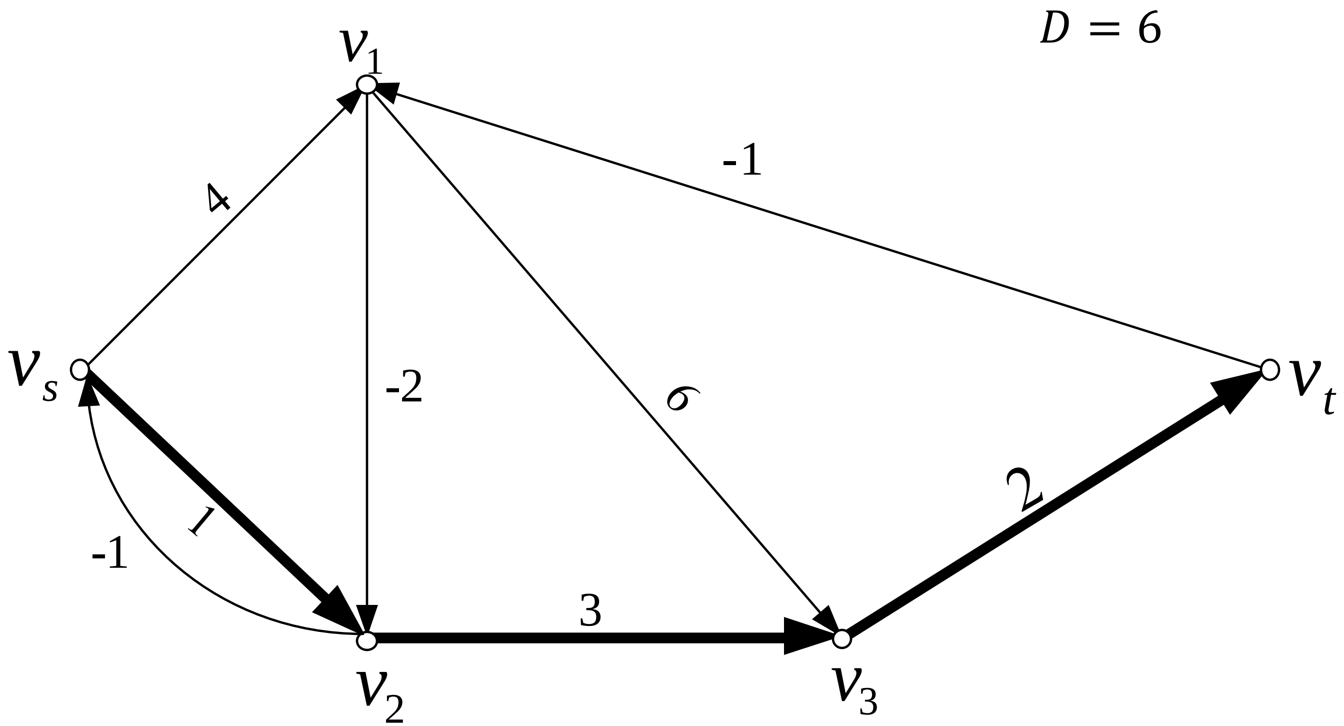
第1次剩余网络最短路



第1次调整网络流

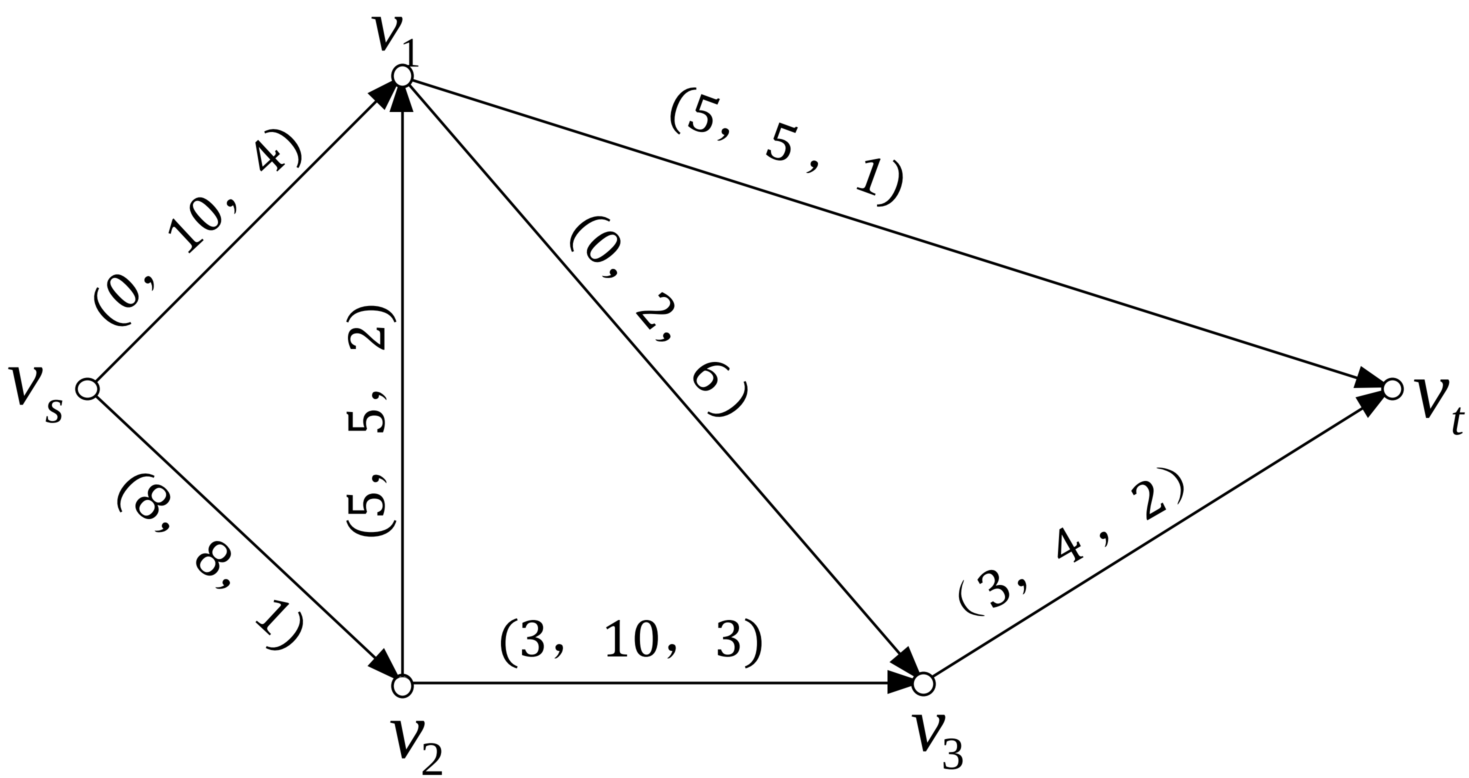


第2次剩余网络最短路

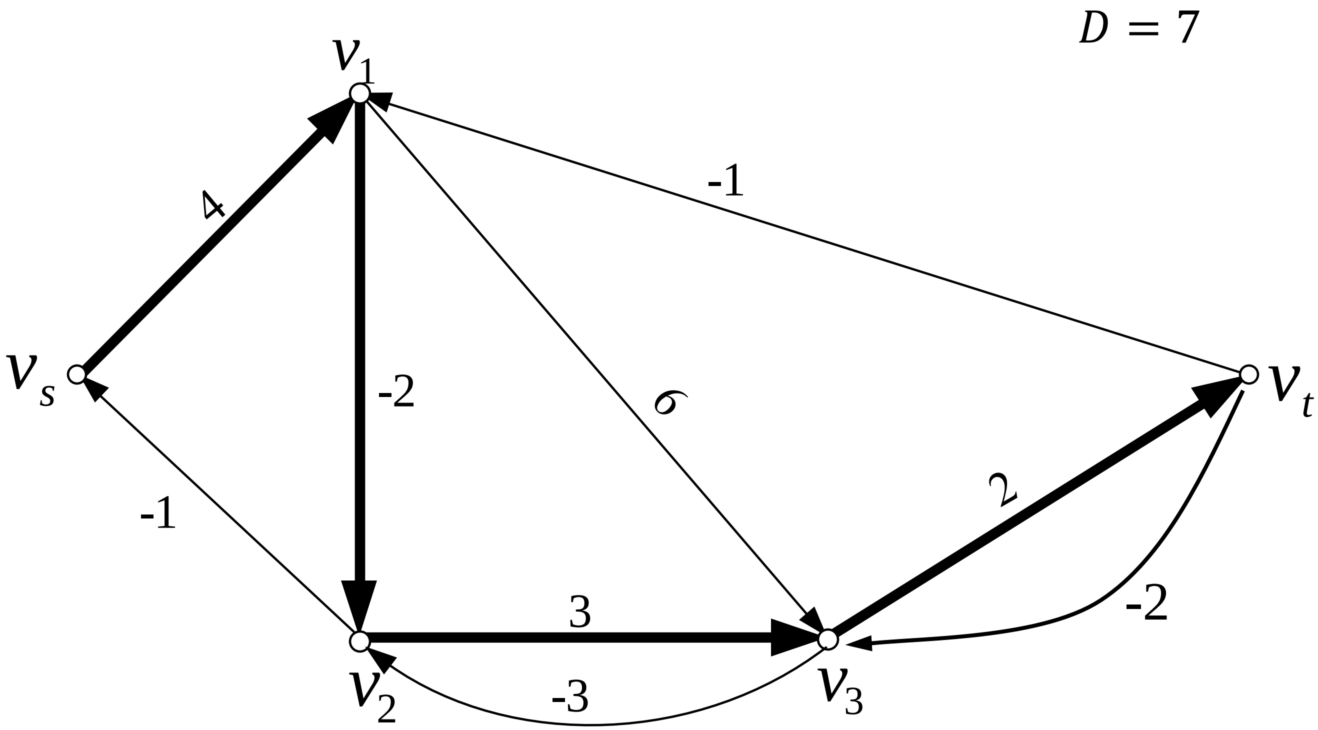


5.3 最小费用流—例题

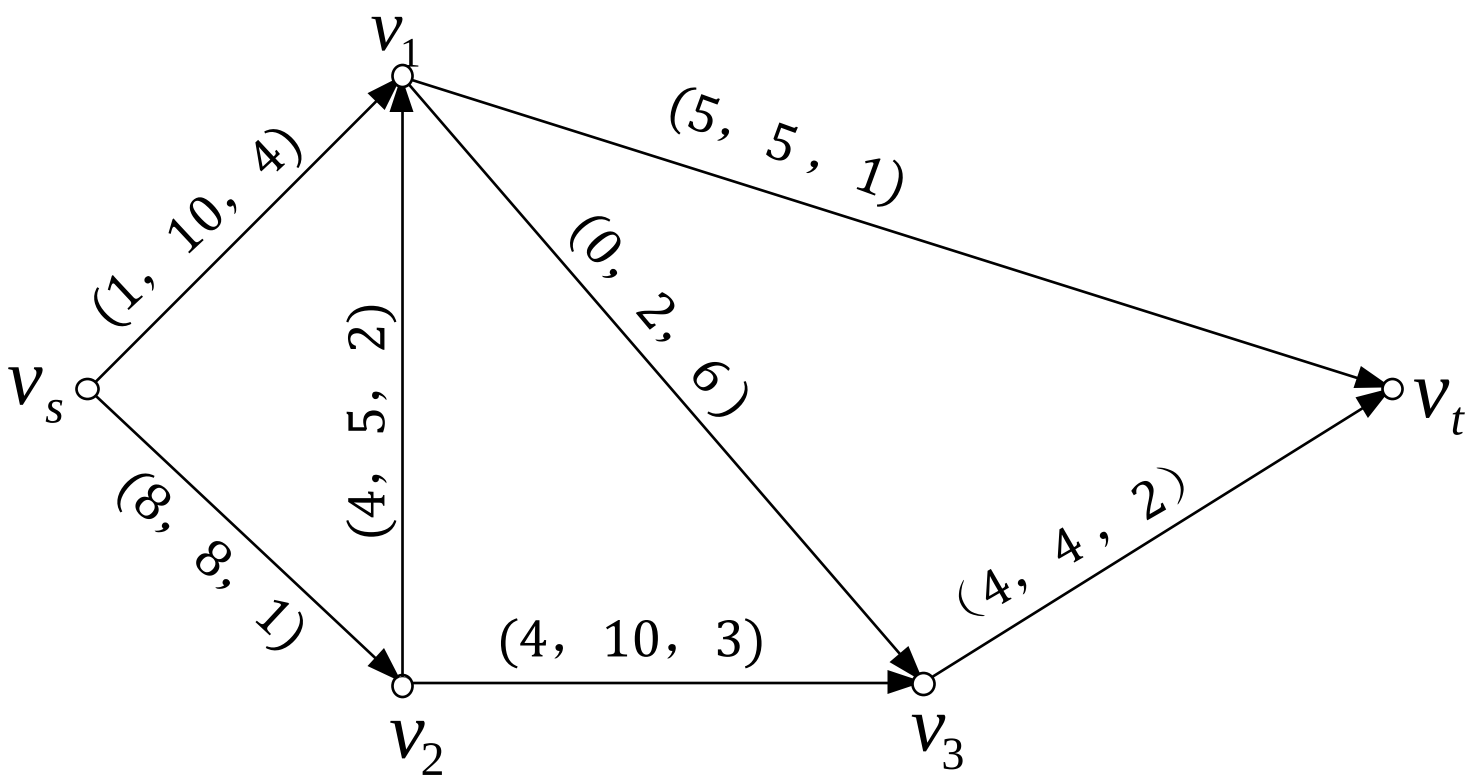
第2次调整网络流



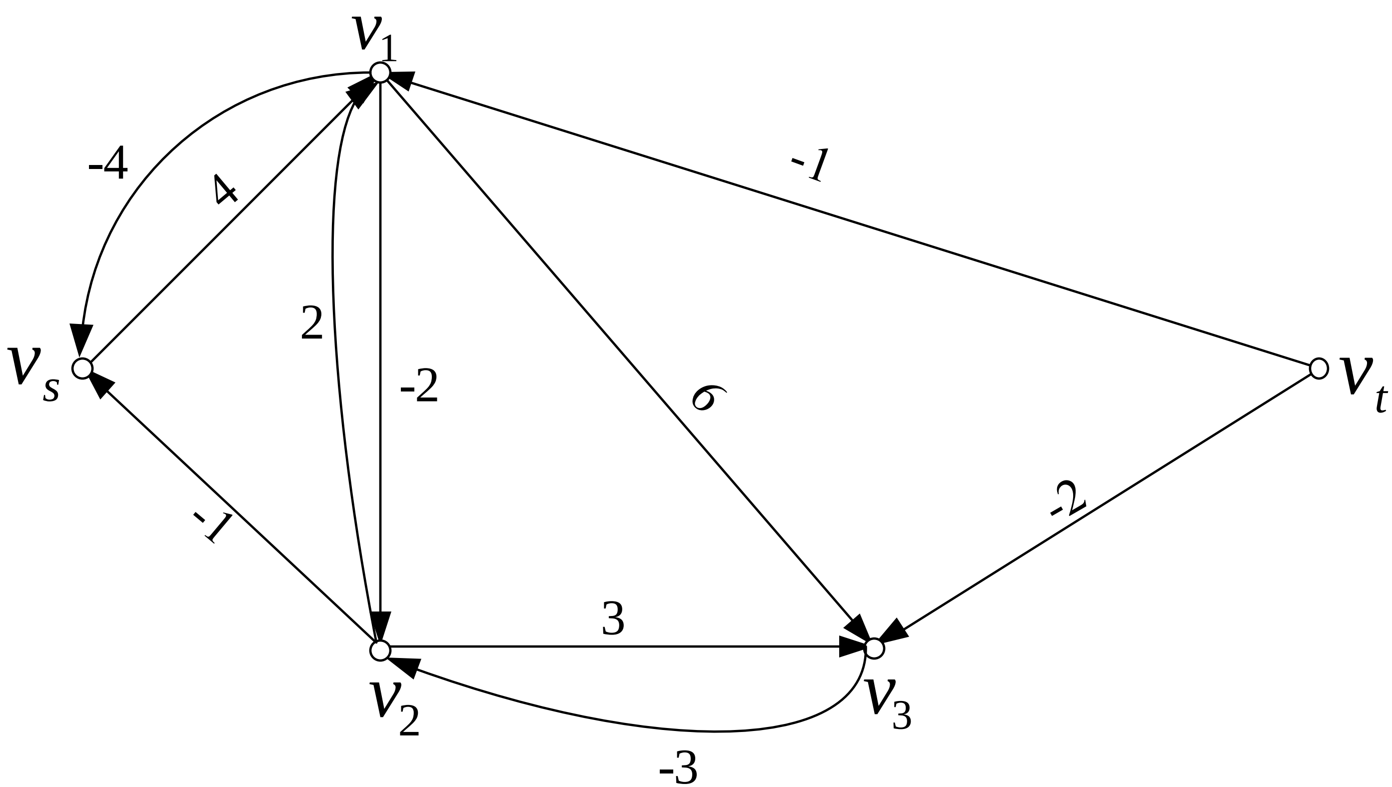
第3次剩余网络最短路



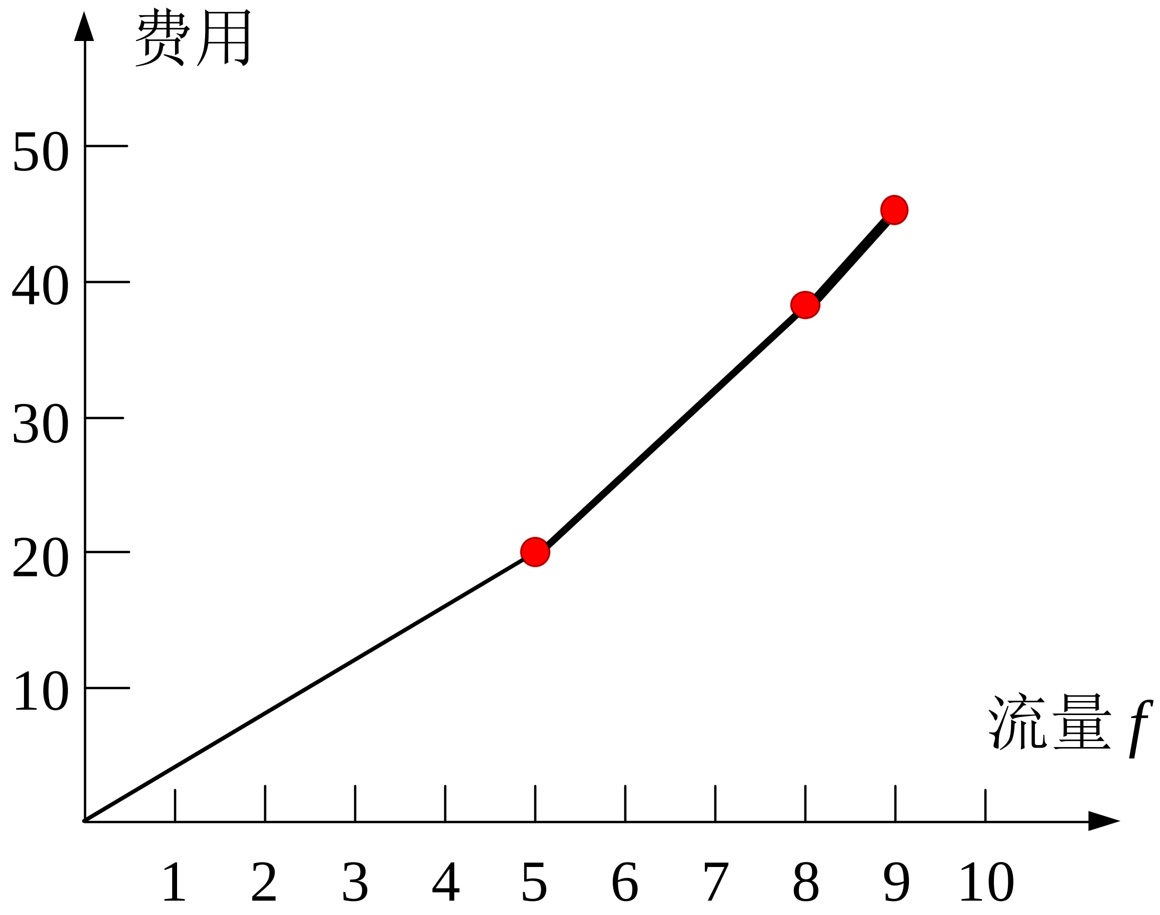
第3次调整网络流



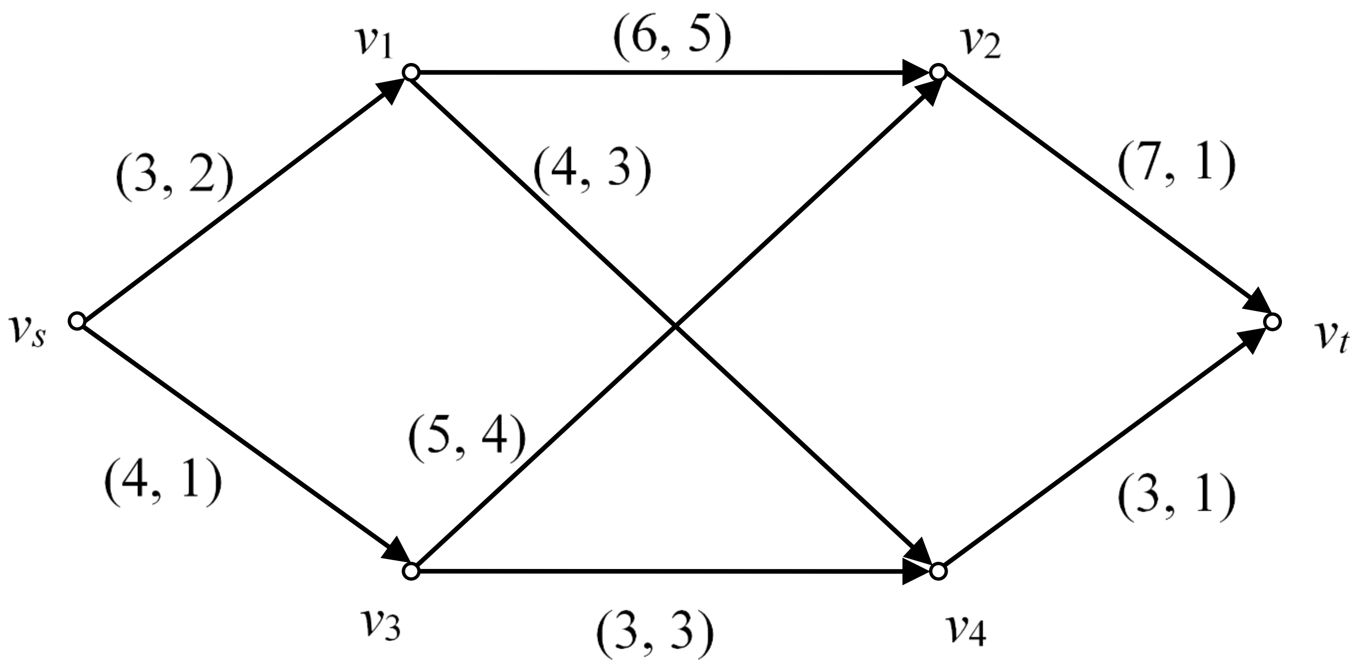
剩余网络已不存在最短路



5.3 最小费用流—例题



- 如图所示网络中，有向边旁的数字为(c_{ij}, d_{ij})，c_{ij}表示容量，d_{ij}表示单位流量费用，试求从v_s到v_t流量为6的最小费用流。



5.4 一般形式的最小费用流问题

$$\min \quad c(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = d_i, \forall i \in V \quad \begin{cases} d_i > 0, \text{ supply node/source} \\ d_i < 0, \text{ demand node/sink} \\ d_i = 0, \text{ transshipment node} \end{cases}$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \quad \rightarrow \quad 0 \le x_{ij} \le u_{ij}$$

— 容量受限的转运问题

— 对于单源单汇的情形，寻找从 s 流到 t 的给定流量的最小费用流，是经典的最小费用流问题

令 $d_s = v,\ d_t = -v,\ d_i = 0$(当$i \ne s,t$) 即可。

最小费用流问题的特例

- **最短路问题**

  令所有弧的容量下界为 0，容量上界为 1。图中某个节点 s 的供需量为 1，某个节点 t 的供需量为 −1。再令所有弧的费用为“弧长”，则此时的最小费用流问题就是最短路问题。

- **运输问题**

  运输问题是研究比较早的最小费用流问题之一，早在1941年Hitchcock就进行了研究，因此运输问题又称为Hitchcock问题。

- **最大流问题**

  设s为起点，t为终点，增加弧(t,s)，令$c_{ts}=-1$，$u_{ts}=+\infty$，而令所有其他弧上的费用为 0，所有节点上的供需量全为 0。