第一章 线性规划

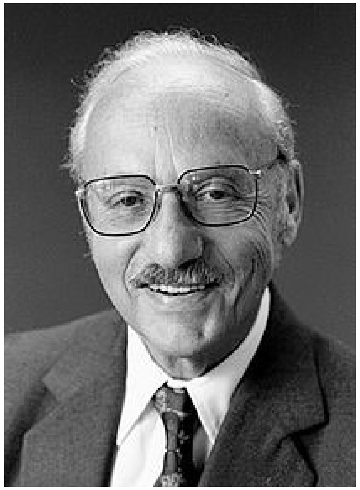
- 线性规划问题及其数学模型
- 图解法
- 单纯形法原理
- 单纯形法计算步骤
- 单纯形法进一步讨论
- 线性规划模型的应用

- **线性规划：目标函数和约束条件均为线性的优化问题。**

- Leonid Kantorovich (1912-1986)
  - 1938年《生产组织与计划中的数学方法》首次提出求解线性规划问题的方法——解乘数法。
  - 把资源最优利用这一传统的经济学问题，由定性研究和一般的定量分析推进到现实计量阶段，对线性规划方法的建立和发展，做出了**开创性**的贡献。
  - 因对资源最优分配理论的贡献而获1975年诺贝尔经济学奖。

线性规划

- George Dantzig (1914-2005)
  - 美国科学院院士
  - 人员轮训、任务分配
  - 于1947年发表单纯形算法 (Simplex method)，是20世纪十大算法之一。
  - 被誉为“线性规划之父”



- 1948年，荷兰裔美国经济学家库普曼斯（Koopmans）和Dantzig在参观兰德公司时，正式提出Linear Programming一词。Koopmans将线性规划问题成功引入到经济学领域。
- 1975年，Kantorovich与Koopmans由于他们在线性规划中的杰出工作共享了当年的诺贝尔经济学奖。
- 从1968年诺贝尔奖设经济学奖后，到1996年28年间的32名获得者中有13人（40%）从事过与线性规划有关的工作。

线性规划

"用数学规划思维看经济体系，经济主体的行为大多可以理解并表达成数学规划中的最优化问题。"

"经济主体就是要追求某种最大化，如果用数学规划来考虑这些问题，会有很多优势，问题能够看得更透彻，并以一个更精确的角度来分析问题。"

----《数学规划与经济分析》周小川

第一章 线性规划

1. 线性规划问题及其数学模型

1.1 线性规划问题建模

- 生产经营中经常提出的一个问题是：如何合理地利用人、财、物，以降低成本，获取效益，这就是规划问题。

例1. 生产计划问题

	A	B	备用资源
煤	1	2	30
劳动力	3	2	60
仓库	0	2	24
利润	40	50	

问产品A, B各生产多少, 可获最大利润?

解： 设产品A, B的生产产量分别为 x_1, x_2

$$\max\ z = 40x_1 + 50x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 30 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_2 \le 24 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例2. 混合配料问题

饲料	维生素/mg A	维生素/mg B	维生素/mg C	每单位成本
1	4	1	0	2
2	6	1	2	5
3	1	7	1	6
4	2	5	3	8
每天维生素的最低需求	12	14	8	

请设计一个既保证维生素摄入量，又最经济的配食方案。

解：设每天给每头奶牛喂食饲料 i 的用量是 $x_i(i=1,2,3,4)$

$$\min\ z = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4$$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 12 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 \geq 14 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 8 \\ x_i \geq 0 (i = 1, \dots, 4) \end{cases}$$

1.1 线性规划问题建模

- 线性规划模型的要素
  - 决策变量：向量$(x_1, \ldots, x_n)^T$，即决策人要考虑和控制的因素
  - 约束条件：线性等式或不等式
  - 目标函数：$z = f(x_1, \ldots, x_n)$ 线性式，求 z 极大或极小
- 线性规划模型的应用范围
  - 严格的线性关系，即比例和叠加性
  - 问题比较复杂的，可以转化或简化为线性规划

- **应用2.1：双原油问题**
- 德克萨斯州海岸有一个小型炼油厂。炼油厂的原油来源于两个产地：沙特阿拉伯和委内瑞拉。炼油厂通过蒸馏等技术把原油精炼成三种产品：汽油、气体燃料以及润滑油。
- 由于两个原产地的原油有着不同的化学构成，它们可以精炼出不同的产品组合。每桶沙特阿拉伯原油可精炼出0.3桶汽油、0.4桶气体燃料以及0.2桶润滑油，剩余0.1桶为精炼损失；而每桶委内瑞拉原油可精炼出0.4桶汽油、0.2桶气体燃料以及0.3桶润滑油，剩余0.1桶为精炼损失。
- 同时，两个原产地原油的成本及供应量也不同。炼油厂每天最多可购得9000桶沙特阿拉伯原油，每桶单价100美金；每天最多只能购得6000桶委内瑞拉原油，每桶单价75美金（由于运输距离较短因此成本也较低）。
- 炼油厂生产出精炼产品供应给不同的批发商。批发商之间相互独立，所有批发商的需求之和为每天2000桶汽油、1500桶气体燃料以及500桶润滑油。炼油厂应该怎样制定生产计划才能最有效地满足需求？

炼油厂每天应购买两个产地的原油各多少？

1.1 线性规划问题建模

$$
\begin{array}{llll}
\min & 100x_1 + 75x_2 & & \text{(total cost)} \\
\text{s.t.} & 0.3x_1 + 0.4x_2 & \geq 2.0 & \text{(gasoline requirement)} \\
& 0.4x_1 + 0.2x_2 & \geq 1.5 & \text{(jet fuel requirement)} \\
& 0.2x_1 + 0.3x_2 & \geq 0.5 & \text{(lubricant requirement)} \\
& x_1 & \leq 9 & \text{(Saudi availability)} \\
& x_2 & \leq 6 & \text{(Venezuelan availability)} \\
& x_1, x_2 \geq 0 & & \text{(nonnegativity)}
\end{array}
\tag{2.6}
$$

例3. 航班降落管控问题

假定有 n 架飞机将要在南京机场降落。飞机 j，$j=1,\dots,n$ 将依次序在时间区间 $[a_j,b_j]$ 内降落。为保障安全，机场希望合理安排这 n 架飞机的降落时间，使得前后两架飞机降落时间间隔能尽可能大。

设第 j 架飞机的降落时间为 t_j

$$\max \min_{j=1,\cdots,n-1} \{t_{j+1}-t_j\}$$

$$s.t. \quad a_j \le t_j \le b_j$$

线性化?

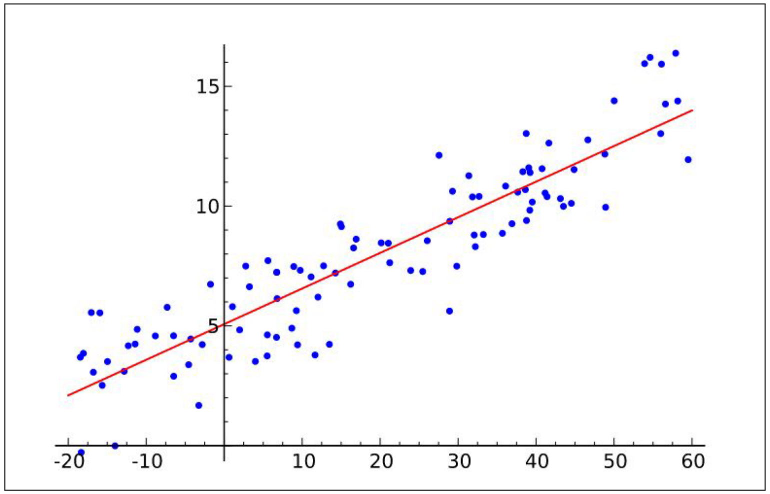
$$\max \Delta$$

$$s.t. \begin{cases} t_2 - t_1 \ge \Delta, \\ t_3 - t_2 \ge \Delta, \\ \cdots, \\ t_n - t_{n-1} \ge \Delta, \\ a_j \le t_j \le b_j \end{cases}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

例4. 数据拟合问题

给定 m 个样本点 $(\mathbf{a}_i, b_i), i = 1, \ldots, m$，其中 $\mathbf{a}_i \in \Re^n, b \in \Re$，想要找一个**线性拟合函数** $b = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$（其中$\mathbf{x} \in \Re^n$是待确定的参数向量）用于将来的预测。



如果定义第 i 个样本点的**残差量**为 $|b_i - \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}|$，我们希望尽可能找到一个对现有数据解释（拟合）最好的模型，即该模型有**最小的残差**。

(1) 最小化最大的残差：

$$\min \max_{i=1,\cdots,m} |b_i - \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}|$$

线性化?

$$\min \ z$$
$$s.t. \begin{cases} b_i - \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \le z, & i = 1, \ldots, m, \\ -b_i + \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \le z, & i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

例4. 数据拟合问题

给定 m 个样本点 $(\mathbf{a}_i, b_i), i = 1, \dots, m$，其中 $\mathbf{a}_i \in \Re^n, b \in \Re$，想要找一个**线性拟合函数** $b = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$（其中$\mathbf{x} \in \Re^n$是待确定的参数向量）用于将来的预测。

如果定义第 i 个样本点的**残差量**为$|b_i - \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}|$，我们希望尽可能找到一个对现有数据解释（拟合）最好的模型，即该模型有**最小的残差**。

(2) 最小化所有残差的和：

$$\min \sum_i (b_i - \mathbf{a}_i^T\mathbf{x})^2$$

最小二乘 (least squares)

$$\min \sum_{i=1}^{m} |b_i - \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}|$$

线性化? →

$$\min\ z_1 + z_2 + \cdots + z_m$$

$$s.t. \begin{cases} b_i - \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \le z_i, & i = 1, \dots, m, \\ -b_i + \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \le z_i, & i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

1.2 线性规划模型的一般形式

$$\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq (=, \leq)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq (=, \leq)\ b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq (=, \leq)\ b_m \\ x_j \geq (\leq) 0,\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

1.3 线性规划模型的标准形式

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

其中 $b_i \geq 0\ (i = 1, 2, \dots, m)$

1.3 线性规划模型的标准形式

- **非标准型 → 标准型**

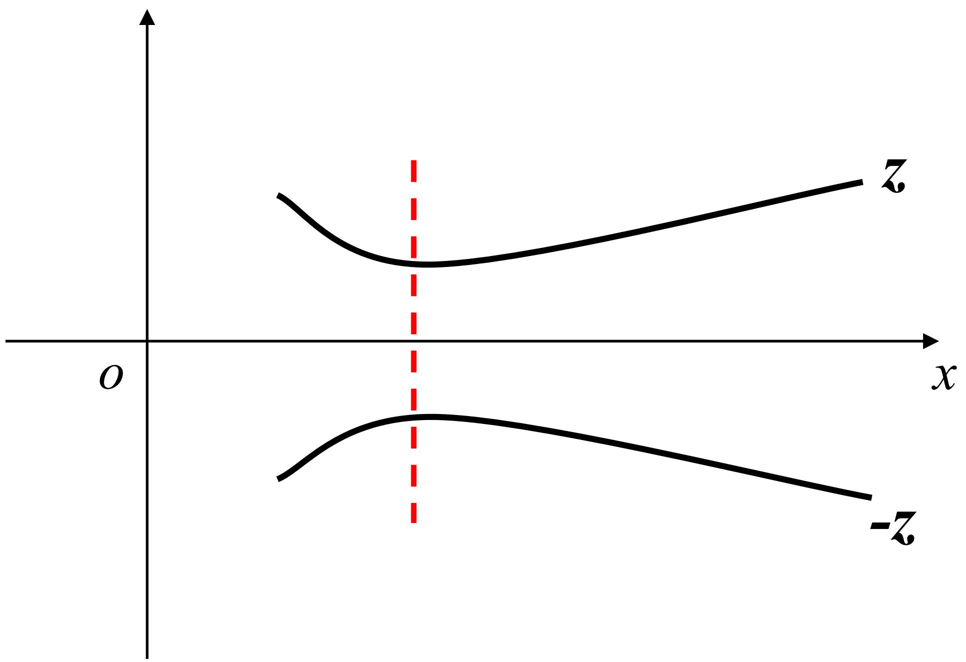
（1）目标函数

（2）约束条件

（3）决策变量

- 非标准型 → 标准型

  - 目标函数



$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\boxed{令\ \boldsymbol{z' = -z}}$$

$$\max\ z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

- 非标准型 → 标准型
  - 约束条件

$$\max z = 40x_1 + 50x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 2x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 非标准型 → 标准型

➢ 约束条件

$$\max z = 40x_1 + 50x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 60 \\ 2x_2 + x_5 = 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

x_3, x_4, x_5称为松弛变量(slack variables)

1.3 线性规划模型的标准形式

- **非标准型 → 标准型**
  - 约束条件

$$\min z = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4$$

$$s.t. \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 12 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 \geq 14 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 8 \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

- **非标准型 → 标准型**

  - 约束条件

$$\min z = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 - x_6 = 14 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_7 = 8 \\ x_1, \dots, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

x_5, x_6, x_7**称为剩余变量(surplus variables)**

- **非标准型 → 标准型**

  - 决策变量

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 - 4x_2 \le 14 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{令 } \boldsymbol{x_1 = x_1{}' - x_1{}''}}$$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1{}' - 3x_1{}'' + 2x_2 \le 8 \\ x_1{}' - x_1{}'' - 4x_2 \le 14 \\ x_1{}', x_1{}'', x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.3 线性规划模型的标准形式

- 非标准型 → 标准型
  - 决策变量

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -6 \le x_1 \le 10 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{-6+6 \le x_1 + 6 \le 10+6}$$

$$\text{令}\ \boldsymbol{x_1{}' = x_1 + 6}$$

$$\boldsymbol{0 \le x_1{}' \le 16}$$

$$s.t.\begin{cases} x_1{}' + x_2 \le 11 \\ x_1{}' \le 16 \\ x_1{}', x_2 \ge 0 \end{cases}$$

变换方法总结

- 目标函数为 min 型，价值系数一律反号，即令
$$z' = -z = -c^T x$$
- 第 i 个约束的 b_i 为负值，则该行左右两端系数同时反号，同时不等号也要反向。
- 第 i 个约束为 $\leq$ 型，在不等式左边增加一个非负的变量 x_{n+i}，称为松弛变量；同时令 $c_{n+i} = 0$。
- 第 i 个约束为 $\geq$ 型，在不等式左边减去一个非负的变量 x_{n+i}，称为剩余变量；同时令 $c_{n+i} = 0$。
- 若 $x_j \leq 0$，令 $x_j = -x_j'$，代入非标准型，则有 $x_j' \geq 0$。
- 若 x_j 正负不限，令 $x_j = x_j' - x_j''$，$x_j' \geq 0$，$x_j'' \geq 0$，代入非标准型。

✓ **练习:**

请将下面的线性规划问题转换为标准形式。

$$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3\text{无限制} \end{cases}$$

解：① 令 $x_3 = x_4 - x_5$

② 加松弛变量 x_6

③ 加剩余变量 x_7

④ 令 $z' = -z$

$$\max z' = x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2 \\ x_1, x_2, \dots, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

1.4 线性规划模型的矩阵表示

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

令 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\max\ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$s.t.\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

1.5 线性规划解的定义

Linear Programming (LP)

$$\max\ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$s.t.\ \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & (1) \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & (2) \end{cases}$$

- **定义1**

满足约束(1)，(2)的 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ 称为LP问题的**可行解**（*feasible solution*），**全部可行解**的集合称为**可行域**（*feasible region*）。

- **定义2**

使目标函数达到最优值的的可行解称为LP问题的**最优解**（*optimal solution*）。