作业 #4

1. 红星日用化工厂为发运产品，下一年度需 6 种不同容积的包装箱。每种包装箱的需求量及生产一个的可变费用如下表。

包装箱代号	1	2	3	4	5	6
容积（m³）	0.08	0.1	0.12	0.15	0.20	0.25
需求量（个）	500	550	700	900	450	400
可变费用（元/个）	5.0	8.0	10.0	12.1	16.3	18.2

由于生产不用容积包装箱时需进行专门准备、下料等，生产某一容积包装箱的固定费用均为 1200 元。又若某一容积包装箱数量不够时，可以用比它容积大的代替。试问该化工厂应订做哪几种代号的包装箱各多少个使费用最节省。(建立线性规划模型即可，无需求解)

解： 设 $x_i\left(i=1,\ldots,6\right)$为代号$i$ 的包装箱的订做数量，

$$y_i=\begin{cases}1, & \text{订做第}i\text{种包装箱}\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

$$\min\quad z=1200\sum_{i=1}^{6}y_i+5x_1+8x_2+10x_3+12.1x_4+16.3x_5+18.2x_6$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{6}x_i=3500\\ x_6\ge 400\\ x_5+x_6\ge 850\\ x_4+x_5+x_6\ge 1750\\ x_3+x_4+x_5+x_6\ge 2450\\ x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\ge 3000\\ x_i\le My_i\left(i=1,\ldots,6\right)\\ x_i\ge 0\text{且为整数}\end{cases}$$

2. 某城市有 6 个区，要确定在哪些区修建消防站。要求保证至少有一个消防站在每个区的 15 分钟（行驶时间）车程内，并希望修建的消防站最少。下表给出了在该城市的各区之间行驶所需要的时间（单位：分钟）。请为该问题建立整数线性规划模型，无需求解。

出发 \ 到达	**区 1**	**区 2**	**区 3**	**区 4**	**区 5**	**区 6**
区 1	0	12	15	30	30	20
区 2	12	0	25	35	20	10
区 3	15	25	0	15	30	20
区 4	30	35	15	0	15	25
区 5	30	20	30	15	0	12
区 6	20	10	20	25	12	0

解：对于每个区来说，要确定是否在那里修建消防站，设 0-1 型变量：

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{如果在区}i\text{修建消防站} \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

目标函数：$\min \quad z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

约束条件：下表说明了哪些位置可以在 15 分钟内达到每个区。

区	在 15 分钟车程内的区	区	在 15 分钟车程内的区
1	1, 2, 3	4	3, 4, 5
2	1, 2, 6	5	4, 5, 6
3	1, 3, 4	6	2, 5, 6

为保证至少有一个消防站在区 i 的 15 分钟车程内，加入约束条件：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 \end{cases}$$

最优目标值是 $z = 2$，多解，其中一个解为：$x_2 = x_4 = 1$，$x_1 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$。

其他解为：$x_3 = x_6 = 1$，$x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0$；$x_3 = x_6 = 1$，$x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$

3. 用割平面法解下列问题：

$$\max \quad z = 7x_1 + 9x_2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 7x_1 + x_2 \le 35 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且为整数} \end{cases}$$

解：【割平面法】

c_j			7	9	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	6	-1	[3]	1	0
0	x_4	35	7	1	0	1
σ_j			7	9	0	0
9	x_2	2	-1/3	1	1/3	0
0	x_4	33	[33/2]	0	-1/3	1
σ_j			10	0	-3	0
9	x_2	7/2	0	1	7/22	1/22
7	x_1	9/2	1	0	-1/22	3/22
σ_j			0	0	-28/11	-15/11

$x_2 = 7/2$ 有最大小数部分 1/2，因此选择该行产生割平面 $-\frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 \le -\frac{1}{2}$。

c_j			2	1	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
9	x_2	7/2	0	1	7/22	1/22	0
7	x_1	9/2	1	0	-1/22	3/22	0

0	x_5	-1/2	0	0	-7/22	-1/22	1
σ_j			0	0	-28/11	-15/11	0
9	x_2	3	0	1	0	0	1
7	x_1	3	1	0	-1	0	3
0	x_4	11	0	0	7	1	-22
σ_j			0	0	7	0	-21
9	x_2	3	0	1	0	0	1
7	x_1	32/7	1	0	0	1/7	-1/7
0	x_3	11/7	0	0	1	1/7	-22/7
σ_j			0	0	0	-1	-8

$x_1 = 32/7$ 有最大小数部分 4/7，因此选择该行产生割平面$-\frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}x_5 \le -\frac{4}{7}$。

c_j			2	1	0	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
9	x_2	3	0	1	0	0	1	0
7	x_1	32/7	1	0	0	1/7	-1/7	0
0	x_3	11/7	0	0	1	1/7	-22/7	0
0	x_6	-4/7	0	0	0	[-1/7]	-6/7	1
σ_j			0	0	0	-1	-8	0
9	x_2	3	0	1	0	0	1	0
7	x_1	4	1	0	0	0	-1	1
0	x_3	1	0	0	1	0	-4	1
0	x_4	4	0	0	0	1	6	-7

σ_j	0	0	0	0	-2	-7

由此，得最优解为 $x_1^* = 4,\ x_2^* = 3$，目标函数值为 55。

4. 用分支定界法解下列问题：

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且为整数} \end{cases}$$

解：【分支定界法】

（1）松弛问题（LP）为：

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \end{cases}$$

最优解为：$x^* = \left(\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)^{\mathrm{T}}$，目标函数值为 7.75。定界：$0 \le z^* \le 7.75$。

（2）取 $x_1 = \frac{11}{4}$ 进行分支，得如下两个 LP 问题：

（LP1）
$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1 \le 2 \end{cases}$$

（LP2）
$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 3 \end{cases}$$

LP1 的最优解为：$x^* = (2, 2)^{\mathrm{T}}$，目标函数值为 6。LP2 的最优解为：$x^* = \left(3, \frac{3}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，

目标函数值为 7.5。定界：$6 \le z^* \le 7.5$。

（3）取 $x_2 = \frac{3}{2}$ 对 LP2 进行分支，得如下两个 LP 问题：

$$\text{(LP21)}\quad \max\ z = 2x_1 + x_2 \quad \text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 3 \\ x_2 \le 1 \end{cases} \qquad \max\ z = 2x_1 + x_2 \quad \text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 3 \\ x_2 \ge 2 \end{cases}\quad \text{(LP22)}$$

LP21 的最优解为：$x^* = \left(\frac{19}{6},1\right)^{\mathrm{T}}$，目标函数值为$\frac{22}{3}$。LP22 无可行解。定界：$6 \le z^* \le \frac{22}{3}$。

（4）取$x_1 = \frac{19}{6}$对 LP21 进行分支，得如下两个 LP 问题：

$$\text{(LP211)}\quad \max\ z = 2x_1 + x_2 \quad \text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 3 \\ x_2 \le 1 \\ x_1 \le 3 \end{cases} \qquad \max\ z = 2x_1 + x_2 \quad \text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 3 \\ x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 4 \end{cases}\quad \text{(LP212)}$$

LP211 的最优解为：$x^* = (3,1)^{\mathrm{T}}$，目标函数值为 7。LP212 无可行解。定界：$7 \le z^* \le 7$。

所以该整数规划的最优解即为：$x^* = (3,1)^{\mathrm{T}}$，目标函数值为 7。

5. 需要分派 5 人做 5 项工作，每人做各项工作的能力评分见下表。应如何分派，才能使总的得分最大？试用匈牙利法求解。

业务 人员	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1.3	0.8	0	0	1.0
A_2	0	1.2	1.3	1.3	0
A_3	1.0	0	0	1.2	0
A_4	0	1.05	0	0.2	1.4
A_5	1.0	0.9	0.6	0	1.1

解： 将系数矩阵转化为标准的最小化指派问题：

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 1.4 & 1.4 & 0.4 \\ 1.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 1.4 \\ 0.4 & 1.4 & 1.4 & 0.2 & 1.4 \\ 1.4 & 0.35 & 1.4 & 1.2 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0.8 & 1.4 & 0.3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1.3 & 1.3 & 0.3 \\ 1.3 & 0.1 & 0 & 0 & 1.3 \\ 0.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 1.2 \\ 1.4 & 0.35 & 1.4 & 1.2 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 1.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 1.3 & 1.3 & 0.3 \\ 1.3 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 1.3 \\ 0.2 & 1.1 & 1.2 & 0 & 1.2 \\ 1.4 & 0.25 & 1.4 & 1.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 & 1.1 & \cancel{0} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 1.3 & 1.3 & 0.4 \\ 1.3 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 1.4 \\ 0.2 & 1.1 & 1.2 & 0 & 1.3 \\ 1.3 & 0.15 & 1.3 & 1.1 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & 0.4 & 1 & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

所以最优指派方案为：$A_1 \to B_1$，$A_2 \to B_3$，$A_3 \to B_4$，$A_4 \to B_5$，$A_5 \to B_2$，总分为：$1.3+1.3+1.2+1.4+0.9=6.1$。

6. 有甲、乙、丙、丁四人和 A、B、C、D、E 五项任务，每人完成任务的时间如下表所示。由于任务数多于人数，故规定其中有一人可兼完成两项任务，其余三人每人完成一项，请确定总时间最少的指派方案。

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
甲	15	19	21	32	27
乙	29	28	16	10	23
丙	24	17	18	30	22
丁	14	32	26	13	35

解： 因为事多人少，添加一个人戊，得系数矩阵如下（匈牙利法求解）。

$$\begin{bmatrix} 15 & 19 & 21 & 32 & 27 \\ 29 & 28 & 16 & 10 & 23 \\ 24 & 17 & 18 & 30 & 22 \\ 14 & 32 & 26 & 13 & 35 \\ 14 & 17 & 16 & 10 & 22 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 17 & 7 \\ 19 & 18 & 5 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 1 & 19 & 12 & 0 & 17 \\ 4 & 7 & 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 18 & 7 \\ 18 & 17 & 4 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 18 & 11 & 0 & 16 \\ 3 & 6 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 18 & 3 \\ 18 & 13 & 0 & 0 & 3 \\ 11 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 14 & 7 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

甲完成 B，乙完成 C、D，丙完成 E，丁完成 A。最少总时间为 19+16+10+22+14=81。