作业 #2

（提交日期：2024/10/29）

1. **[2.1(3)(4)]** 写出下列线性规划问题的对偶问题：

(1)
$$\min \quad z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 10 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

(2)
$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

2. **[2.2]** 设 $\mathbf{A} \in \Re^{m\times n}$， $\mathbf{b} \in \Re^{m}$， $\mathbf{c} \in \Re^{n}$， 已知线性规划的原问题为

$$\max \quad z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

(1) 写出上述线性规划对应的对偶问题；

(2) 如果 $\mathbf{y}^*$ 为对偶问题的最优解，并且假设原问题约束条件右端项 $\mathbf{b}$ 用 $\overline{\mathbf{b}}$ 替换之后其最优解为 $\overline{\mathbf{x}}$，试证明 $\mathbf{c}^T\overline{\mathbf{x}} \leq \overline{\mathbf{b}}^T\mathbf{y}^*$。

3. 给出线性规划问题：

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2 + x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

(1) 写出其对偶问题；(2) 利用对偶问题性质证明原问题目标函数值 $z \leq 1$。

4. 考虑如下线性规划问题：

$$\min \quad z = 60x_1 + 40x_2 + 80x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(1) 用对偶单纯形法**求解原问题**；

(2) 用单纯形法**求解其对偶问题**，并对比(1)与(2)中每步计算得到的结果。

5. **[2.6]** 已知线性规划问题 A 和 B 如下：

问题A

$$\max\quad z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \qquad \text{影子价格}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j=b_1 & y_1\\ \sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j=b_2 & y_2\\ \sum_{j=1}^{n}a_{3j}x_j=b_3 & y_3\\ x_j\ge 0\ \left(j=1,\cdots,n\right)\end{cases}$$

问题B

$$\max\quad z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \qquad \text{影子价格}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}3a_{1j}x_j=3b_1 & \hat{y}_1\\ \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3}a_{2j}x_j=\frac{1}{3}b_2 & \hat{y}_2\\ \sum_{j=1}^{n}\left(a_{3j}+3a_{1j}\right)x_j=b_3+3b_1 & \hat{y}_3\\ x_j\ge 0\ \left(j=1,\cdots,n\right)\end{cases}$$

(1) 试写出 y_i 和 $\hat{y}_i\left(i=1,2,3\right)$ 的关系式。

(2) 如果用 $x_3'=\frac{1}{3}x_3$ 替换问题 A 中的 x_3，请问影子价格 y_i 是否有变化？

6. **[2.7]** 先用单纯形法求解线性规划：

$$\max\quad z=2x_1+3x_2+x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\le 1\\ \frac{1}{3}x_1+\frac{4}{3}x_2+\frac{7}{3}x_3\le 3\\ x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

再分析下列条件单独变化的情况下最优解的变化：

(1) 目标函数中变量 x_3 的系数变为 6；

(2) 约束条件右端项由 $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$；

(3) 增添一个新的约束 $x_1+2x_2+x_3\le 4$。

7. 给出线性规划问题

$$\max\ z=3x_1+x_2+c_3x_3+c_4x_4$$

$$s.t.\begin{cases}6x_1+3x_2+5x_3+4x_4\le 450\\ 3x_1+4x_2+5x_3+2x_4\le 300+\lambda\\ x_j\ge 0, j=1,\dots,4\end{cases}$$

请回答下列问题：

(1) 考虑$\lambda=0$的情形，以(x_1,x_2)为基变量列出相应的单纯形表。

(2) 若(x_1,x_2)为最优基，请问(c_3,c_4)在什么范围内变化时，最优解保持不变？

(3) 若(x_1,x_2)为最优基，请问λ在什么范围内变化时，影子价格保持不变？

(4) 如果引入一个新的决策变量x_5，其对应的目标函数系数为c_5，工艺向量为$P_5 = (2, 3)^T$，请问c_5在什么范围内变化时，最优解才会发生变化？

8. 已知某纺织厂生产三种针织产品，其下月的生产计划必须满足以下约束：

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 12$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \le f$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

x_1, x_2, x_3是三种产品的产量，第一个约束是给定的设备工时约束，第二个约束是原料棉花的约束，取决于当月的棉花供应量f。假设三种产品的单位净利润分别为 2，3 和 3。请给出原料棉花的影子价格与其供应量f的关系$\lambda_2(f)$，以及纺织厂总净利润与f的关系$z(f)$，并绘制$z(f)$的图。