作业 #2

1. **[2.1(3)(4)]** 写出下列线性规划问题的对偶问题：

(1) $\min\ z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 10 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \le 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \le 0, x_2, x_3 \ge 0, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

(2) $\min\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

解：(1) 其对偶问题为：

$\max\ w = 10y_1 + 8y_2 + 6y_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ y_1 + y_3 \le 2 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \le -4 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3\text{无约束} \end{cases}$$

(2) 其对偶问题为：

$$\max\ w = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$\text{s.t.}\ u_i + v_j \le c_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$$

2. **[2.2]** 设 $\mathbf{A} \in \Re^{m\times n}$， $\mathbf{b} \in \Re^{m}$， $\mathbf{c} \in \Re^{n}$， 已知线性规划的原问题为

$$\max\ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \mathbf{Ax} \ge \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{cases}$$

(1) 写出上述线性规划对应的对偶问题；

(2) 如果 $\mathbf{y}^*$ 为对偶问题的最优解，并且假设原问题约束条件右端项 $\mathbf{b}$ 用 $\bar{\mathbf{b}}$ 替换之后其最优解为 $\bar{\mathbf{x}}$，试证明 $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} \le \bar{\mathbf{b}}^T\mathbf{y}^*$。

解：(1) 对偶问题为：

$$\min\ z = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \mathbf{A}^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \le \mathbf{0} \end{cases}$$

(2) 原问题$\mathbf{b}$被$\bar{\mathbf{b}}$替换后对应的对偶问题变为：

$$\min\ z=\bar{\mathbf{b}}^T\mathbf{y}$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\mathbf{A}^T\mathbf{y}\ge\mathbf{c}\\ \quad\mathbf{y}\le\mathbf{0}\end{cases}$$

显然，可行域没有变化，故$\mathbf{y}^*$仍是新问题的对偶问题的可行解。又$\bar{\mathbf{x}}$是新问题的可行解，由弱对偶性有：$\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}\le\bar{\mathbf{b}}^T\mathbf{y}^*$。或者，

$\bar{\mathbf{b}}^T\mathbf{y}^*\ge\left(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}\right)^T\mathbf{y}^*=\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}^T\mathbf{y}^*\ge\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{c}=\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}$。

3. 给出线性规划问题：

$$\max\ \ z=x_1+2x_2+x_3$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\ \ x_1+x_2-x_3\le 2\\ \ \ x_1-x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2+x_3\ge 2\\ x_1\ge 0,x_2\le 0,x_3\text{无约束}\end{cases}$$

(1) 写出其对偶问题；(2) 利用对偶问题性质证明原问题目标函数值$z\le 1$。

解：（1）对偶问题为：

$$\min\ \ w=2y_1+y_2+2y_3$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}y_1+y_2+2y_3\ge 1\\ y_1-y_2+y_3\le 2\\ -y_1+y_2+y_3=1\\ y_1\ge 0,y_2\text{无约束},y_3\le 0\end{cases}$$

（2）因为$Y=\left(0,1,0\right)^T$是对偶问题的一个可行解，其对应的目标函数值为 1，所以由弱对偶性，原问题的目标函数值$z\le 1$。

4. 考虑如下线性规划问题：

$$\min\ z=60x_1+40x_2+80x_3$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}3x_1+2x_2+x_3\ge 2\\ 4x_1+x_2+3x_3\ge 4\\ 2x_1+2x_2+2x_3\ge 3\\ x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

(1) 用对偶单纯形法**求解原问题**；

(2) 用单纯形法**求解其对偶问题**，并对比(1)与(2)中每步计算得到的结果。

解：（1）其对偶问题为

$$\max\ w = 2y_1 + 4y_2 + 3y_3$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 60 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \le 40 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le 80 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

（2）用对偶单纯形法求解原问题：

c_j			-60	-40	-80	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	-2	-3	-2	-1	1	0	0
0	x_5	-4	[-4]	-1	-3	0	1	0
0	x_6	-3	-2	-2	-2	0	0	1
$c_j - z_j$			-60	-40	-80	0	0	0
0	x_4	1	0	-5/4	5/4	1	-3/4	0
-60	x_1	1	1	1/4	3/4	0	-1/4	0
0	x_6	-1	0	[-3/2]	-1/2	0	-1/2	1
$c_j - z_j$			0	-25	-35	0	-15	0
0	x_4	11/6	0	0	5/3	1	-1/3	-5/6
-60	x_1	5/6	1	0	2/3	0	-1/3	1/6
-40	x_2	2/3	0	1	1/3	0	1/3	-2/3
$c_j - z_j$			0	0	-80/3	0	-20/3	-50/3

（3）用单纯形法求解其对偶问题：

c_j			2	4	3	0	0	0
c_B	y_B	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0	y_4	60	3	[4]	2	1	0	0
0	y_5	40	2	1	2	0	1	0
0	y_6	80	1	3	2	0	0	1
$c_j - z_j$			2	4	3	0	0	0
4	y_2	15	3/4	1	1/2	1/4	0	0
0	y_5	25	5/4	0	[3/2]	-1/4	1	0
0	y_6	35	-5/4	0	1/2	-3/4	0	1

$c_j - z_j$			-1	0	1	-1	0	0
4	y_2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	y_3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	y_6	80/3	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1
$c_j - z_j$			-11/6	0	0	-5/6	-2/3	0

（4）每次迭代的结果中，原问题的检验数行的相反数是对偶问题的可行解；原问题的变量对应于对偶问题的松弛变量。

5. **[2.6]** 已知线性规划问题 A 和 B 如下：

问题A

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{影子价格}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1 & y_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j = b_2 & y_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{3j} x_j = b_3 & y_3 \\ x_j \geq 0 \ \left(j=1,\cdots,n\right) & \end{cases}$$

问题B

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{影子价格}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} 3a_{1j} x_j = 3b_1 & \hat{y}_1 \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{3} a_{2j} x_j = \frac{1}{3} b_2 & \hat{y}_2 \\ \sum_{j=1}^{n} \left(a_{3j}+3a_{1j}\right) x_j = b_3+3b_1 & \hat{y}_3 \\ x_j \geq 0 \ \left(j=1,\cdots,n\right) & \end{cases}$$

(1) 试写出 y_i 和 $\hat{y}_i\left(i=1,2,3\right)$ 的关系式。

(2) 如果用 $x_3'=\frac{1}{3}x_3$ 替换问题 A 中的 x_3，请问影子价格 y_i 是否有变化？

解: (1) 问题 B 相当于对问题 A 左乘了矩阵 $P=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 因此由 $y^T=c_B^TB^{-1}$,

得: $\hat{y}^T=c_B^T\left(PB\right)^{-1}=c_B^TB^{-1}P^{-1}=y^TP^{-1}$, 即 $\hat{y}^T=y^T\begin{bmatrix}1/3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

展开:

$\hat{y}_1=\dfrac{1}{3}y_1-y_3$, $\hat{y}_2=3y_2$, $\hat{y}_3=y_3$。

或者:

$y_1=3\hat{y}_1+3\hat{y}_3$, $y_2=\dfrac{1}{3}\hat{y}_2$, $y_3=\hat{y}_3$。

(2) 没有变化。

6. **[2.7]** 先用单纯形法求解线性规划:

$$\max \quad z=2x_1+3x_2+x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{1}{3}x_2+\dfrac{1}{3}x_3\le 1\\ \dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{4}{3}x_2+\dfrac{7}{3}x_3\le 3\\ x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

再分析下列条件单独变化的情况下最优解的变化:

(1) 目标函数中变量 x_3 的系数变为 6;

(2) 约束条件右端项由 $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$;

(3) 增添一个新的约束 $x_1+2x_2+x_3\le 4$。

解: 最终单纯形表为:

			2	3	1	0	0
c_B	**x_B**	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	1	1	0	-1	4	-1
3	x_2	2	0	1	2	-1	1
			0	0	-3	-5	-1

最优解为 $x^*=\left(1,2,0\right)^T$。

(1) $\sigma_3' = c_3 - \mathbf{c_B B^{-1} P_3} = 6 - (5,1)\begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = 2 > 0$，需继续按单纯形计算。

			2	3	6	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	1	1	0	-1	4	-1
3	x_2	2	0	1	[2]	-1	1
			0	0	2	-5	-1
2	x_1	2	1	1/2	0	7/2	-1/2
6	x_3	1	0	1/2	1	-1/2	1/2
			0	-1	0	-4	-2

最优解变为 $x^* = (2,0,1)^T$ 。

(2) 由 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$，最优基不变。

(3) 将原最优解 $x^* = (1,2,0)^T$ 代入新增约束，得： $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 + 4 + 0 = 5 > 4$ ，所以新增约束起作用，需重新计算。

			2	3	1	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	1	1	0	-1	4	-1	0
3	x_2	2	0	1	2	-1	1	0
0	x_6	4	1	2	1	0	0	1
			0	0	-3	-5	-1	0
2	x_1	1	1	0	-1	4	-1	0
3	x_2	2	0	1	2	-1	1	0
0	x_6	-1	0	0	-2	-2	[-1]	1
			0	0	-3	-5	-1	0
2	x_1	2	1	0	1	6	0	-1
3	x_2	1	0	1	0	-3	0	1
0	x_5	1	0	0	2	2	1	-1
			0	0	-1	-3	0	-1

7. 给出线性规划问题

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$
$$s.t.\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 450 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 300 + \lambda \\ x_j \ge 0, j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

请回答下列问题：

(1) 考虑$\lambda = 0$的情形，以(x_1, x_2)为基变量列出相应的单纯形表。

(2) 若(x_1, x_2)为最优基，请问(c_3, c_4)在什么范围内变化时，最优解保持不变？

(3) 若(x_1, x_2)为最优基，请问λ在什么范围内变化时，影子价格保持不变？

(4) 如果引入一个新的决策变量x_5，其对应的目标函数系数为c_5，工艺向量为$P_5 = (2, 3)^T$，请问c_5在什么范围内变化时，最优解才会发生变化？

(1) 引入松弛变量，将原问题转化为标准形式：

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$
$$s.t.\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 450 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_6 = 300 + \lambda \\ x_j \ge 0, j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

取变量(x_1, x_2)为初始基变量，对应的初始单纯形表如下表所示。

$c_j \rightarrow$			3	1	c_3	c_4	0	0	
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
3	x_1	60-1/5 λ	1	0	1/3	2/3	4/15	-1/5	
2	x_2	30+2/5 λ	0	1	1	0	-1/5	2/5	
			0	0	c_3-3	c_4-2	-2/5	-1/5	

(2) 若$c_3 \le 3$和$c_4 \le 2$时，最优解不变。

(3) $-75 \le \lambda \le 300$时，影子价格不变。

(4) 引入松弛变量，将原问题转化为标准形式：

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5$$
$$s.t.\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 450 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_7 = 300 + \lambda \\ x_j \ge 0, j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

取变量(x_1, x_2)为初始基变量，对应的初始单纯形表如下表所示。

$c_j \rightarrow$			3	2	c_3	c_4	c_5	0	0	
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
3	x_1	30+2/5 λ	1	0	1/3	2/3	-1/15	4/15	-1/5	
2	x_2	60-1/5 λ	0	1	1	0	4/5	-1/5	2/5	
			0	0	c_3-3	c_4-2	c_5-7/5	-2/5	-1/5	

显然，$c_5 > \frac{7}{5}$时，最优解变化。

8. 已知某纺织厂生产三种针织产品，其下月的生产计划必须满足以下约束：

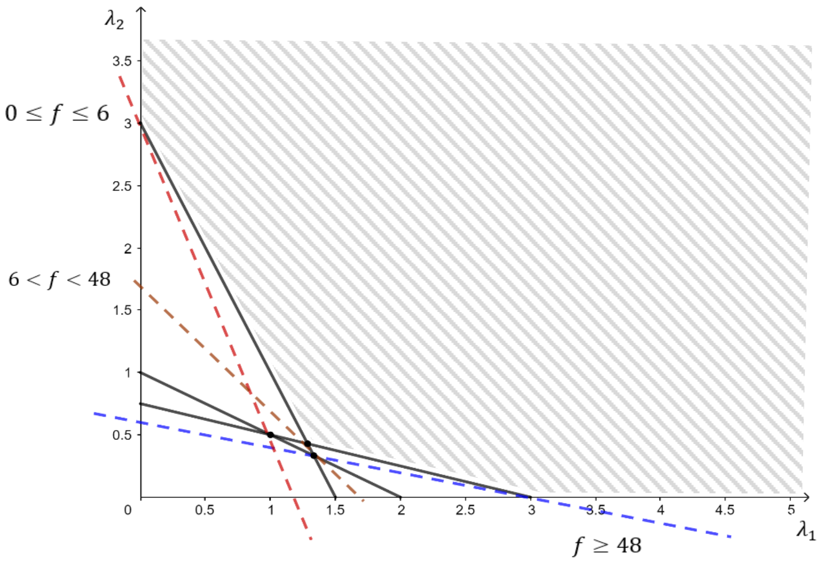
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 12$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \le f$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

x_1, x_2, x_3是三种产品的产量，第一个约束是给定的设备工时约束，第二个约束是原料棉花的约束，取决于当月的棉花供应量 f 。假设三种产品的单位净利润分别为2，3和3。请给出原料棉花的影子价格与其供应量 f 的关系 $\lambda_2(f)$，以及纺织厂总净利润与 f 的关系 $z(f)$，并绘制 $z(f)$ 的图。

解：（法 1）该问题的对偶问题为：

$$\min \quad w = 12\lambda_1 + f\lambda_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 \ge 2 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 \ge 3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \ge 3 \\ \lambda_1, \lambda_2 \ge 0 \end{cases}$$

f不同取值对应λ_2的关系如下：



图中阴影部分是可行域，红色线表示$0 \le f \le 6$的情况，交点是（0,3），因此能得到$\lambda_2 = 3$；棕色线表示$6 < f < 48$的情况，交点是$\left(\frac{9}{7}, \frac{3}{7}\right)$，因此能得到$\lambda_2 = \frac{3}{7}$；蓝色线表示$f \ge 48$的情况，交点是（3,0），因此能得到$\lambda_2 = 0$。

1）若$-\frac{12}{f} \geq -\frac{1}{4}$，即$f \geq 48$时，$\lambda_1(f) = 3$，$\lambda_2(f) = 0$；

2）若$-2 < -\frac{12}{f} < -\frac{1}{4}$，即$6 < f < 48$时，$\lambda_1(f) = \frac{9}{7}$，$\lambda_2(f) = \frac{3}{7}$；

3）若$-\frac{12}{f} \leq -2$，即$0 \leq f \leq 6$时，$\lambda_1(f) = 0$，$\lambda_2(f) = 3$。

$$z(f) = w(f) = \begin{cases} 36, & f \geq 48 \\ \dfrac{3f + 108}{7} & 6 < f < 48 \\ 3f & 0 \leq f \leq 6 \end{cases}$$

（**法 2，也可使用单纯形法解对偶问题**）原问题标准型：

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = f \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

用单纯形表求解：

c_j			2	3	3	0	0
c_B	X_B	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_4	12	1	1	2	1	0
0	X_5	f	1	4	1	0	1
			2	3	3	0	0

(1)$0 \leq f < 48$时

c_j			2	3	3	0	0
c_B	X_B	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_4	12-$\frac{f}{4}$	1/2	0	7/4	1	-1/4
3	X_2	$\frac{f}{4}$	1/2	1	1/4	0	1/4
			1/2	0	9/4	0	-3/4

a)$0 \leq f \leq 6$时

c_j			2	3	3	0	0
c_B	X_B	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_4	12-2f	-3	-7	0	1	-2
3	X_3	f	2	4	1	0	1
			-4	-9	0	0	-3

此时最优解为（0，0，f）,$z_{max} = 3f$, $y_2 = 0 * (-2) + 3 * 1 = 3$

b)$6 < f < 48$时

c_j			2	3	3	0	0
c_B	X_B	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
3	X_3	$\frac{48-f}{7}$	2/7	0	1	4/7	-1/7
3	X_2	$\frac{2f-12}{4}$	3/7	1	0	-1/7	2/7
			-1/7	0	0	-9/7	-3/7

此时$z_{max} = (3f + 108)/7, y_2 = 3 * (-1/7) + 3 * 2/7 = 3/7$

(2)$f \geq 48$时

c_j			2	3	3	0	0
c_B	X_B	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
3	X_2	12	1	1	2	1	0
0	X_5	$f-48$	-2	0	-7	-4	1
			-1	0	-3	-3	0

此时$z_{max} = 36,\ y_2 = 3 * 0 + 0 * 1 = 0$

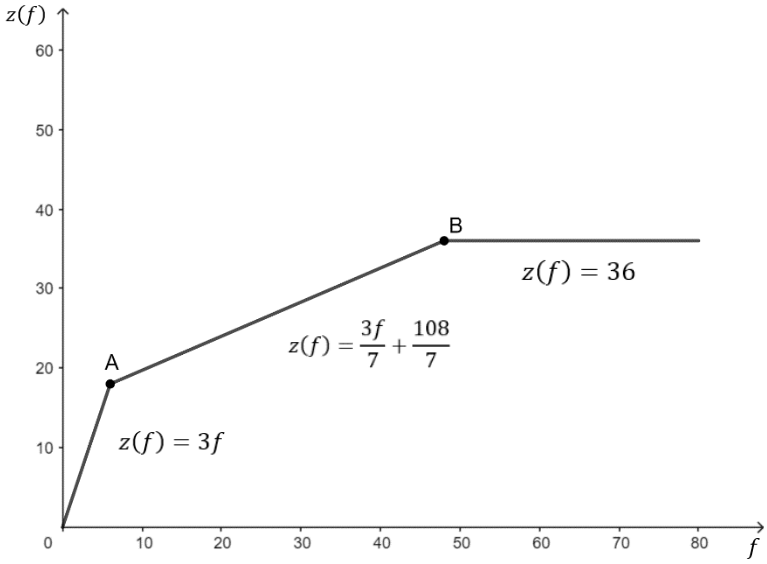
综上：

$$\lambda_2(f) = \begin{cases} 3, & 0 \leq f \leq 6 \\ \frac{3}{7}, & 6 < f < 48 \\ 0, & f \geq 48 \end{cases}$$

总净利润：

$$z(f) = w(f) = \begin{cases} 36, & f \geq 48 \\ \frac{3f+108}{7} & 6 < f < 48 \\ 3f & 0 \leq f \leq 6 \end{cases}$$

纺织厂总净利润与 f 的关系如下：



$z(f)$
60
50
40
30
20
10
0
10
20
30
40
50
60
70
80
f
A
B
$z(f) = 36$
$z(f) = \frac{3f}{7} + \frac{108}{7}$
$z(f) = 3f$