

## 作业 #1

1. [1.2(1)] 将下列线性规划问题化成标准形式:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_4 \text{ 无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

2. 分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题, 并对照指出单纯形表中的各基本可行解对应图解法中可行域的哪一顶点。

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3. [1.3(2)] 用单纯形法求解下列线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4. [1.4(1)] 分别用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5. [1.5] 已知线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

现得到其某个基本可行解的单纯形表, 如下表所示。

| $x_B$      | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
|            |     | 2     | -2    | 0     | 0     | 1     |
|            |     | 2     | -3    | 0     | $c$   | 0     |
|            |     | -0.5  | 1     | 1     | 0     | $d$   |
| $\sigma_j$ |     | -0.5  | $a$   | $b$   | 0     | 0     |

根据单纯形表的特征，试求：

- (1) 未知数  $a, b, c, d$  的值；
- (2) 该基本可行解及其目标函数值；
- (3) 该基本可行解是否为最优解？

6. [1.8] 某饲料厂用玉米胚芽粕、大豆饼和酒糟等 3 种原料生产 3 种不同规格的饲料，由于 3 种原料的营养成分不同，因而不同规格的饲料对 3 种原料的比例有特殊的要求，具体要求及产品价格、原料价格、原料的数量见表 1.38，试问该饲料厂应制定怎样的生产计划使得总利润最大？建立线性规划模型并尝试用软件求解。

表 饲料厂生产数据

| 规格要求              | 产品 Q <sub>1</sub> | 产品 Q <sub>2</sub> | 产品 Q <sub>3</sub> | 原料价格<br>(元/kg) | 原料可用量<br>(kg) |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|----------------|---------------|
| 原料 P <sub>1</sub> | ≥15%              | ≥20%              | 25%               | 1.7            | 1500          |
| 原料 P <sub>2</sub> | ≥25%              | ≥10%              |                   | 1.5            | 1000          |
| 原料 P <sub>3</sub> |                   |                   | ≤40%              | 1.2            | 2000          |
| 产品价格<br>(元/kg)    | 2                 | 3                 | 2.3               |                |               |

7. [1.9] 由于 24 小时内通过某高速公路收费站的车辆数不均匀，因此在收费站工作的人员安排也相应得按时段不同而有所差异。假设根据历史资料统计，在各时段至少所需的职工人数如下表。

表 各时段所需职工人数

| 时间段           | 所需职工人数 |
|---------------|--------|
| 00:00 ~ 06:00 | 2      |
| 06:00 ~ 10:00 | 8      |
| 10:00 ~ 12:00 | 4      |
| 12:00 ~ 16:00 | 3      |
| 16:00 ~ 18:00 | 6      |
| 18:00 ~ 22:00 | 5      |
| 22:00 ~ 24:00 | 3      |

每个职工上班后先工作 4 小时，然后离开 1 小时（休息、就餐等），再工作

4 小时。职工可以在任何正点时间开始上班，试问如何排班能使雇佣的职工数最少？建立线性规划模型并尝试用软件求解。

8. 假设某种小型设备的生产工厂签订了未来  $n$  个月的交货合同，其中第  $i$  个月的合同交货量为  $d_i$  台,  $i=1, \dots, n$ 。该工厂每个月在正常生产时间内可生产  $r$  台设备，每台生产成本为  $b$  元。如果加班生产，由于要支付加班费，每台生产成本为  $c$  元 ( $c > b$ )。生产的设备如果不交货，则每台每月的存储成本为  $s$  元。请建立线性规划模型帮助工厂制定合理的生产计划，使得在完成交货合同的前提下最小化总成本。

9. 请给出下列问题等价的线性规划模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3|x_2 - 10| \\ \text{s.t.} \quad & |x_1 + 2| + |x_2| \leq 5 \end{aligned}$$

10. 如果集合  $S_1$  和  $S_2$  均为凸集，那么  $\beta S_1$ ,  $S_1 + S_2$ ,  $S_1 \cap S_2$ ,  $S_1 \cup S_2$  是否为凸集？请证明或给出反例。