

得分 二、填空题:

1. 设 $S_1 = \{x: x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0\}$, $S_2 = \{x: x_1 - x_2 \leq 0, x_1 \leq 1\}$ 。令 $S = S_1 \cup S_2$, 请判断集合 S 是否为凸集? _____。
2. 在资源配置优化的线性规划问题中, 若某资源有剩余, 则该资源的影子价格等于_____。
3. 若指派问题的系数矩阵的某一列元素分别加上一个常数 k , 最佳指派方案是否会发生变化? _____。
4. 给一个图 $G=(V, E)$, 如果图 $G'=(V', E')$, 使 $V' \subseteq V$ 及 $E' \subseteq E$, 则称 G' 是 G 的一个_____。
5. 在图 $G=(V, E)$ 中, 所有点的次之和是边数的_____倍。

得分 三、考虑线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & -p_1x_1 + p_2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

请先写出该问题的对偶问题。然后, 在以下三种情况下, 分别求该问题及其对偶问题的最优解以及最优目标函数值。

- (1) $p_1 < p_2$
- (2) $p_1 = p_2$
- (3) $p_1 > p_2$

得分 四、在组合拍卖问题中, 允许投标人提交**项目组合**的投标。假设

$M = \{1, 2, \dots, m\}$ 为拍卖商要拍卖的项目集, 规定每个项目至多中标一次。每个投标标书记为 $B_j = (S_j, p_j)$, 其中非空集合 S_j 是项目组合子集 ($S_j \subseteq M$), p_j 是相应项目组合的出价。

- (1) 假设拍卖商收到了 n 份标书 B_1, B_2, \dots, B_n , 为了获得最大利益, 拍卖商应如何确定中标者, 试建立数学模型帮助拍卖商进行决策 (建模不求解)。
- (2) 若现在有三个项目进行拍卖, 拍卖商收到了以下 4 份投标标书: $B_1 = (\{1\}, 6)$, $B_2 = (\{2, 3\}, 12)$, $B_3 = (\{1, 2\}, 12)$, $B_4 = (\{1, 2, 3\}, 16)$, 请写出在此情形下拍卖商的决策模型, 并给出最优的中标策略。

得分 五、考虑无约束优化问题：

$$\min f = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$$

求出所有的静止点，并判断哪些静止点是局部极小点？

得分 六、考虑非线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min & (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

请用库恩-塔克条件求解该问题。

得分 七、某风景区有 6 个海岛，相互间的距离如下表（单位：哩）。现欲架设海上浮桥，使各岛相连且与陆地相连。已知第 1 个海岛离海岸最近，为 0.3 哩，求使架设浮桥长度最短的方案。

	2	3	4	5	6
1	1.0	3.0	2.5	5.0	4.0
2		2.6	1.7	4.2	3.2
3			1.0	2.5	1.3
4				2.6	1.8
5					1.3

得分 八、某输油网络如图所示，节点为所经城市，图中弧上所标数据为连接两城市间的并行输油管道数量。试确定最少需切断多少条管道才能断绝城市 1 到城市 6 的原油输送？需切断哪些？为什么？

