习题参考答案

第五章

5.1 略。

5.2 (1) 是凸函数；(2) 不是凸函数；(3) 是凸函数；(4) 不是凸函数。

5.3 略。

5.4 (1) $\nabla f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}16x_1+3x_2-25\\3x_1+14x_2+31\end{pmatrix}=0$，求解得稳定点为：$\mathbf{x}^*=(x_1,x_2)=\left(\dfrac{443}{215},-\dfrac{517}{215}\right)$。

(2) $\nabla^2 f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}16 & 3\\3 & 14\end{pmatrix}$，该 Hessian 阵为正定矩阵，所以是凸规划，稳定点$\mathbf{x}^*$既是局部极小点，也是全局极小点。

5.5 (1) 令目标函数一阶导数为零，求得两个稳定点为：$(-1,-1)^T$ 和 $(1,0)^T$。进一步检验二阶导数，目标函数的 Hessian 阵为：

$$\begin{pmatrix}12x_1-12x_2-6 & -12x_1+12x_2+6\\-12x_1+12x_2+6 & 12x_1\end{pmatrix}$$

分别代入两个稳定点，得：

$$\begin{pmatrix}-6 & 6\\6 & -12\end{pmatrix}\text{和}\begin{pmatrix}6 & -6\\-6 & 12\end{pmatrix}$$

只有第二个矩阵满足半正定，因此$(1,0)^T$为局部极小点。

(2) 是下降方向。

5.6 证明：略。

5.7 计算列表如下。

k	a_k	b_k	b_k-a_k	λ_k	μ_k	$f(\lambda_k)$	$f(\mu_k)$
1	0	1	1	0.382	0.618	0.828	0.921
2	0	0.618	0.618	0.236	0.382	0.845	0.828
3	0.236	0.618	0.382	0.382	0.472	0.828	0.847
4	0.236	0.472	0.236	0.236	0.382	0.8281	0.8284
5	0.236	0.382	0.146				

当$k=5$时，近似极小点所在区间为$[0.236,0.382]$，区间长度小于 0.2。近似极小点可取为：$\mathbf{x}^*\approx\dfrac{0.236+0.382}{2}=0.309$。

5.8 极小点 $x^*=(4,2)^T$ 。

5.9 因为 $\bar{\mathbf{x}}$ 是非线性规划问题的最优解，所以其满足 K-T 条件，即

$$\begin{cases}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\lambda}=0\\ \boldsymbol{\lambda}\geq 0,\bar{\mathbf{x}}-\mathbf{b}\geq 0,\boldsymbol{\lambda}^T(\bar{\mathbf{x}}-\mathbf{b})=0\end{cases}$$

将 $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$ 代入互补条件，可得：$\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}-\mathbf{b})=0$，即 $\bar{\mathbf{x}}$ 与 $\bar{\mathbf{x}}-\mathbf{b}$ 关于 $\mathbf{A}$ 共轭。

5.10 目标函数的 Hessian 矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$$

取初始点 $\mathbf{x}_0=(-2,4)^T$，则 $\mathbf{g}_0=\mathbf{A}\mathbf{x}_0-\mathbf{b}=(-12,6)^T\neq\mathbf{0}$，搜索方向 $\mathbf{d}_0=-\mathbf{g}_0=(12,-6)^T$ 。

第一次迭代：

步长 $\alpha_0=\dfrac{\mathbf{g}_0^T\mathbf{g}_0}{\mathbf{d}_0^T\mathbf{A}\mathbf{d}_0}=\dfrac{5}{17}$，新的迭代点

$$\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_0+\alpha_0\mathbf{d}_0=\left(\frac{26}{17},\frac{38}{17}\right)^T$$

检验梯度 $\mathbf{g}_1=\mathbf{A}\mathbf{x}_1-\mathbf{b}=\left(\dfrac{6}{17},\dfrac{12}{17}\right)^T\neq\mathbf{0}$，所以参数 $\beta_0=\dfrac{\mathbf{g}_1^T\mathbf{g}_1}{\mathbf{g}_0^T\mathbf{g}_0}=\dfrac{1}{289}$，从而新的搜索方向为：

$$\mathbf{d}_1=-\mathbf{g}_1+\beta_0\mathbf{d}_0=\left(-\frac{90}{289},-\frac{210}{289}\right)^T$$

第二次迭代：

步长 $\alpha_1=\dfrac{\mathbf{g}_1^T\mathbf{g}_1}{\mathbf{d}_1^T\mathbf{A}\mathbf{d}_1}=\dfrac{17}{10}$，新的迭代点

$$\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1+\alpha_1\mathbf{d}_1=(1,1)^T$$

检验梯度 $\mathbf{g}_2=\mathbf{A}\mathbf{x}_2=(0,0)^T$，所以 $\mathbf{x}_2=(1,1)^T$ 是最优解，迭代终止。

5.11 经检验，$\mathbf{x}^{(1)}$ 不是 K-T 点；$\mathbf{x}^{(2)}$ 是 K-T 点。

5.12 目标函数 $f(\mathbf{x})=2x_1+3x_2+4x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$，约束函数 $g_1(\mathbf{x})=x_1-x_2$，$g_2(\mathbf{x})=4-x_1-x_2$，$g_3(\mathbf{x})=3-x_1$ 的梯度分别为

$$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}2+8x_1+2x_2\\ 3+2x_1+2x_2\end{pmatrix},\quad \nabla g_1(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\quad \nabla g_2(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix},\quad \nabla g_3(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$$

代入 K-T 条件，得：

$$\begin{cases}2+8x_1+2x_2-w_1+w_2+w_3=0\\ 3+2x_1+2x_2+w_1+w_2=0\\ w_1(x_1-x_2)=0\\ w_2(4-x_1-x_2)=0\\ w_3(3-x_1)=0\\ w_1,w_2,w_3\geq 0\\ x_1-x_2\geq 0\\ 4-x_1-x_2\geq 0\\ 3-x_1\geq 0\end{cases}$$

求解，得满足 K-T 条件的点为： $x_1=\frac{1}{6}, x_2=-\frac{5}{3}$，相应的拉格朗日乘子 $w_1=w_2=w_3=0$ 。

5.13 (1) 利用二次损失函数做罚函数，得下面的无约束优化问题：

$$\min \ \ \pi(\mathbf{x},\rho)=x_1^2+x_2^2+\frac{1}{2}\rho(x_1+x_2-2)^2$$

对给定的ρ，由无约束优化问题的一阶最优性条件，得：

$$\begin{cases}2x_1+\rho(x_1+x_2-2)=0\\2x_2+\rho(x_1+x_2-2)=0\end{cases}$$

求解这个方程组，得：

$$x_1(\rho)=x_2(\rho)=\frac{\rho}{1+\rho}$$

当 $\rho\to\infty$ 时， $x_1^*=1, x_2^*=1$ 。

(2) 利用二次损失函数做罚函数：

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{cases}0, & \text{if}\, g(\mathbf{x})\le 0\\ \frac{1}{2}(x_1+x_2-4)^2, & \text{if}\, g(\mathbf{x})>0\end{cases}$$

$$\pi(\mathbf{x},\rho)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2+\rho\varphi(\mathbf{x})$$

由此，得：

$$\frac{\partial\pi(\mathbf{x},\rho)}{\partial x_1}=\begin{cases}2(x_1-3), & \text{if}\, g(\mathbf{x})\le 0\\ 2(x_1-3)+\rho(x_1+x_2-4), & \text{if}\, g(\mathbf{x})>0\end{cases}$$

$$\frac{\partial\pi(\mathbf{x},\rho)}{\partial x_2}=\begin{cases}2(x_2-2), & \text{if}\, g(\mathbf{x})\le 0\\ 2(x_2-2)+\rho(x_1+x_2-4), & \text{if}\, g(\mathbf{x})>0\end{cases}$$

当 $g(\mathbf{x})>0$ 时，

$$\begin{cases}2(x_1-3)+\rho(x_1+x_2-4)=0\\2(x_2-2)+\rho(x_1+x_2-4)=0\end{cases}$$

解得： $x_1=\frac{5\rho+6}{2\rho+2}$， $x_2=\frac{3\rho+4}{2\rho+2}$ 。当 $\rho\to\infty$ 时， $x_1^*=\frac{5}{2}, x_2^*=\frac{3}{2}$ 。此时， $g(\mathbf{x}^*)\le 0$ ，满足约束条件。

5.14 (1) 构建倒数障碍函数：

$$B(x,\mu)=\frac{1}{6}(x_1+1)^3+x_2+\frac{\mu}{x_1-1}+\frac{\mu}{x_2}$$

令其一阶导数为零，得：

$$\begin{cases}\frac{\partial B(x,\mu)}{\partial x_1}=\frac{1}{2}(x_1+1)^2-\frac{\mu}{(x_1-1)^2}=0\\ \frac{\partial B(x,\mu)}{\partial x_2}=1-\frac{\mu}{x_2^2}=0\end{cases}$$

求解，得：

$$x_1(\mu)=\sqrt{1+\sqrt{2\mu}}, x_2(\mu)=\sqrt{\mu}$$

当 $\mu\to 0$ ， $x_1^*=1, x_2^*=0$ 。

(2) 构建对数障碍函数：

$$B(x,\mu)=-x_1-x_2-\mu\ln x_1-\mu\ln x_2-\mu\ln(1-x_1-x_2)$$

令其一阶导数为零，得：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial B(x,\mu)}{\partial x_1}=-1-\dfrac{\mu}{x_1}+\dfrac{\mu}{1-x_1-x_2}=0\\ \dfrac{\partial B(x,\mu)}{\partial x_2}=-1-\dfrac{\mu}{x_2}+\dfrac{\mu}{1-x_1-x_2}=0\end{cases}$$

易见 $x_1=x_2$，代入上面的第一个等式，可得：

$$2x_1^2+(3\mu-1)x_1-\mu=0$$

求解，得：

$$x_1(\mu)=x_2(\mu)=\frac{1-3\mu+\sqrt{(3\mu-1)^2+8\mu}}{4}$$

当 $\mu\to 0$， $x_1^*=x_2^*=\dfrac{1}{2}$。

5.15 构建对数障碍函数：

$$B(x,\mu)=\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)-\mu\ln(x_1+x_2-1)$$

令其一阶导数为零，得：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial B(x,\mu)}{\partial x_1}=x_1-\dfrac{\mu}{x_1+x_2-1}=0\\ \dfrac{\partial B(x,\mu)}{\partial x_2}=x_2-\dfrac{\mu}{x_1+x_2-1}=0\end{cases}$$

易见 $x_1=x_2$，代入上面的第一个等式，可得：

$$2x_1^2-x_1-\mu=0$$

求解，得：

$$x_1(\mu)=x_2(\mu)=\frac{1+\sqrt{1+8\mu}}{4}$$

当 $\mu\to 0$， $x_1^*=x_2^*=\dfrac{1}{2}$。拉格朗日乘子的估计为：

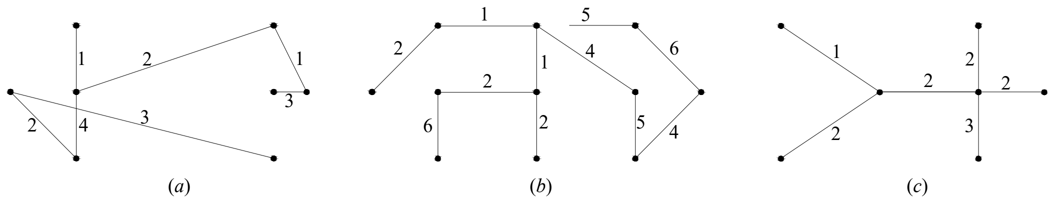
$$\lambda(\mu)=\frac{\mu}{x_1+x_2-1}=\frac{2\mu}{\sqrt{1+8\mu}-1}$$

当 $\mu\to 0$， $\lambda^*=\dfrac{1}{2}$。

第七章

7.1 题，四间：APB，RCT，S，D

7.2 题，如下图



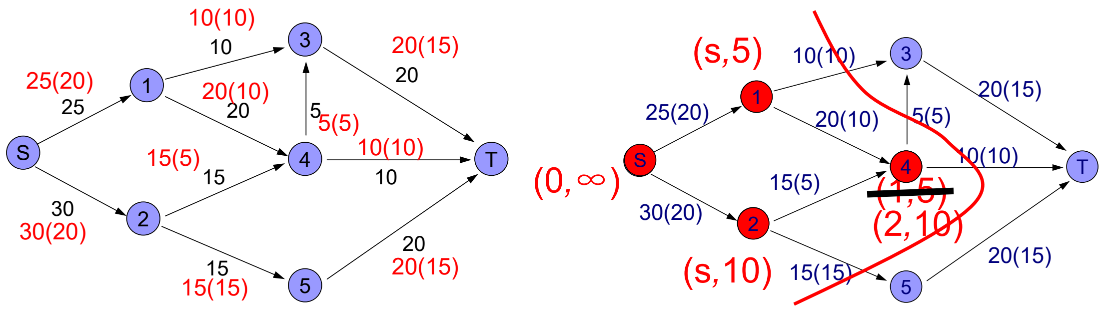
7.3 题，略

7.4 题，1→2→3→5→7

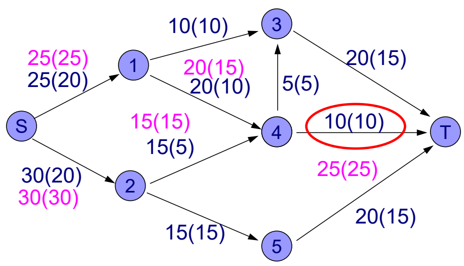
7.5 题，最大流量 22 千辆/小时

7.6 题，1）可行流从后往前，注意中间点平衡，例如下左图，可行流流量为 40

2）标号法，如下右图，找到最大流 40



3）思路 1：看网络中的最小容量弧；思路 2：先看流到 T 的三条弧，找满弧。因此改变 4→T 的容量，结果如下图，最大流 55



7.7 题，最大流量 6

7.8 题 (a) 流量 $f_{s1}=4, f_{s2}=3, f_{13}=3, f_{14}=1, f_{24}=2, f_{43}=1, f_{3t}=5, f_{4t}=1$, 总费用=45

(b) 流量 $f_{s1}=6, f_{s2}=16, f_{21}=8, f_{1t}=14, f_{23}=8, f_{3t}=8$ 总费用=96

7.9 题 (a) 流量 $f_{xa}=5, f_{xc}=6, f_{ab}=5, f_{cb}=3, f_{cd}=3, f_{by}=8, f_{dy}=3$, 总费用=103

(b) 流量 f_{xa}=4, f_{xb}=5, f_{ay}=4, f_{bc}=5, f_{cy}=5, 总费用=63

7.10 题，原图全部非欧拉图

(a) 用边连接 DC、FI，则为欧拉图，添加边后欧拉圈可从任一点出发，如 D 发 D 终

(b) 用边连接 AB、DG、EK，则为欧拉图，欧拉圈如 A 发 A 终

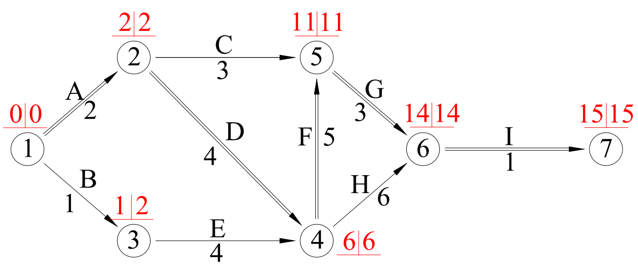
(c) 用边连接 CL，则为欧拉图，欧拉圈如 A 发 A 终

7.11 题，分别找出各图中的奇点，然后将图中奇点按最短连线两两相连即可。

7.12 题，1）略，2）总工期 20，关键路线：B-D-H-I

7.13 题，前三步略，关键路线(a):1-4-5-8-9， (b):1-3-5-7-11

7.14 题，如下图



7.15 题，如下图