习题参考答案

第一章

1.1 (1) 有唯一最优解：$\mathbf{x}^*=\left(2,0\right)^T$，最优目标函数值为 4。

(2) 有无穷多最优解：$\mathbf{x}^*=\alpha\mathbf{x}_A^*+\left(1-\alpha\right)\mathbf{x}_B^*\ \left(0\le\alpha\le1\right)$，其中 $\mathbf{x}_A^*=\left(2,3\right)^T$，$\mathbf{x}_B^*=\left(4,2\right)^T$，最优目标函数值为 16。

1.2 (1) 令 $x_4=x_4'-x_4''$，得：

$$\max\quad z=3x_1-4x_2+2x_3-5x_4'+5x_4''$$
$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}-4x_1+x_2-2x_3+x_4'-x_4''=2\\x_1+x_2-x_3+2x_4'-2x_4''+x_5=14\\-2x_1+3x_2+x_3-x_4'+x_4''-x_6=2\\x_1,x_2,x_3,x_4',x_4'',x_5,x_6\ge0\end{cases}$$

(2) 令 $z'=-z$，$x_3=x_3'-x_3''$，得：

$$\max\quad z'=x_1-2x_2+3x_3'-3x_3''$$
$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}x_1+x_2+x_3'-x_3''+x_4=7\\x_1-x_2+x_3'-x_3''-x_5=2\\x_1,x_2,x_3',x_3'',x_4,x_5\ge0\end{cases}$$

1.3 (1) $\mathbf{x}^*=\left(8,0,0\right)^T$ (2) $x^*=\left(0,1.5,0,0\right)^T$

1.4 (1) 最优解为 $x^*=\left(\frac{45}{7},\frac{4}{7},0\right)^T$，最优目标函数值为 $\frac{102}{7}$；(2) 无可行解。

1.5 (1) 据表，此时基变量为 x_5,x_4,x_3，易知：$b=0,\ c=1,\ d=0$，
$a=1-\left(-1\right)\times\left(-2\right)-\left(-1\right)\times1=0$；
(2) 非基变量 $x_1=x_2=0$，由此求得：$x_3=1,\ x_4=6,\ x_5=2$，目标函数值为 3；
(3) 根据检验数可知，该基本可行解是最优解。

1.6 由 $B^{-1}\begin{bmatrix}b_1&a_{11}&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1&a_{11}&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&1&0&1\\2&\frac{1}{2}&1&0\end{bmatrix}$，

解得：$a_{11}=\frac{9}{2},a_{12}=1,a_{13}=4,a_{21}=\frac{5}{2},a_{22}=1,a_{23}=2,b_1=8,b_2=5$；
由最终单纯形表的检验数计算得：$c_1=-7,c_2=-4,c_3=-8$。

1.7 解：全部可能的下料方案如下：

	方案 1	方案 2	方案 3	方案 4	方案 5	方案 6	方案 7	方案 8	需要量
2.9m	1	2	0	1	0	1	0	0	100
2.1m	0	0	2	2	1	1	3	0	200
1.5m	3	1	2	0	3	1	0	4	100
余料	0	0.1	0.2	0.3	0.8	0.9	1.1	1.4	

设 x_j 为按第 j 种方案下料的原材料根数，建立线性规划模型如下：

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{8} x_i$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2+x_4+x_6 \geq 100 \\ 2x_3+2x_4+x_5+x_6+3x_7 \geq 200 \\ 3x_1+x_2+2x_3+3x_5+x_6+4x_8 \geq 100 \\ x_i \geq 0, i=1,\cdots,8 \end{cases}$$

按方案 1 裁 20 根，按方案 3 裁 20 根，按方案 4 裁 80 根，总共需 120 根圆钢。

1.8 解：设 x_{ij} 为产品 Q_i 中原料 P_j 的含量，建立线性规划模型如下：

$$\begin{aligned} \max \quad z=&2\left(x_{11}+x_{12}+x_{13}\right)+3\left(x_{21}+x_{22}+x_{23}\right)+2.3\left(x_{31}+x_{32}+x_{33}\right)-1.7\left(x_{11}+x_{21}+x_{31}\right) \\ &-1.5\left(x_{12}+x_{22}+x_{32}\right)-1.2\left(x_{13}+x_{23}+x_{33}\right) \end{aligned}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31} \leq 1500 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} \leq 1000 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} \leq 2000 \\ x_{11} \geq 0.15\left(x_{11}+x_{12}+x_{13}\right) \\ x_{12} \geq 0.25\left(x_{11}+x_{12}+x_{13}\right) \\ x_{21} \geq 0.20\left(x_{21}+x_{22}+x_{23}\right) \\ x_{22} \geq 0.10\left(x_{21}+x_{22}+x_{23}\right) \\ x_{31} = 0.25\left(x_{31}+x_{32}+x_{33}\right) \\ x_{33} \leq 0.40\left(x_{31}+x_{32}+x_{33}\right) \\ x_i \geq 0, i=1,\cdots,8 \end{cases}$$

1.9 解：设 x_i 为从正点 i 开始上班的人数 $\left(i=0,1,2,\cdots 22,23\right)$，建立线性规划模型如下：

$$\min \quad z=\sum_{i=0}^{23} x_i$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}
x_0+x_{23}+x_{22}+x_{21}+x_{19}+x_{18}+x_{17}+x_{16}\ge 2\\
x_1+x_0+x_{23}+x_{22}+x_{20}+x_{19}+x_{18}+x_{17}\ge 2\\
x_2+x_1+x_0+x_{23}+x_{21}+x_{20}+x_{19}+x_{18}\ge 2\\
x_3+x_2+x_1+x_0+x_{22}+x_{21}+x_{20}+x_{19}\ge 2\\
x_4+x_3+x_2+x_1+x_{23}+x_{22}+x_{21}+x_{20}\ge 2\\
x_5+x_4+x_3+x_2+x_0+x_{23}+x_{22}+x_{21}\ge 2\\
x_6+x_5+x_4+x_3+x_1+x_0+x_{23}+x_{22}\ge 8\\
x_7+x_6+x_5+x_4+x_2+x_1+x_0+x_{23}\ge 8\\
x_8+x_7+x_6+x_5+x_3+x_2+x_1+x_0\ge 8\\
x_9+x_8+x_7+x_6+x_4+x_3+x_2+x_1\ge 8\\
x_{10}+x_9+x_8+x_7+x_5+x_4+x_3+x_2\ge 4\\
x_{11}+x_{10}+x_9+x_8+x_6+x_5+x_4+x_3\ge 4\\
x_{12}+x_{11}+x_{10}+x_9+x_7+x_6+x_5+x_4\ge 3\\
x_{13}+x_{12}+x_{11}+x_{10}+x_8+x_7+x_6+x_5\ge 3\\
x_{14}+x_{13}+x_{12}+x_{11}+x_9+x_8+x_7+x_6\ge 3\\
x_{15}+x_{14}+x_{13}+x_{12}+x_{10}+x_9+x_8+x_7\ge 3\\
x_{16}+x_{15}+x_{14}+x_{13}+x_{11}+x_{10}+x_9+x_8\ge 6\\
x_{17}+x_{16}+x_{15}+x_{14}+x_{12}+x_{11}+x_{10}+x_9\ge 6\\
x_{18}+x_{17}+x_{16}+x_{15}+x_{13}+x_{12}+x_{11}+x_{10}\ge 5\\
x_{19}+x_{18}+x_{17}+x_{16}+x_{14}+x_{13}+x_{12}+x_{11}\ge 5\\
x_{20}+x_{19}+x_{18}+x_{17}+x_{15}+x_{14}+x_{13}+x_{12}\ge 5\\
x_{21}+x_{20}+x_{19}+x_{18}+x_{16}+x_{15}+x_{14}+x_{13}\ge 5\\
x_{22}+x_{21}+x_{20}+x_{19}+x_{17}+x_{16}+x_{15}+x_{14}\ge 3\\
x_{23}+x_{22}+x_{21}+x_{20}+x_{18}+x_{17}+x_{16}+x_{15}\ge 3\\
x_i\ge 0\text{且为整数},\ i=0,1,2,\cdots,23
\end{cases}$$

1.10 解：设第i季度买入，第j季度卖出的木材量为x_{ij}，标号 1=冬，2=春，3=夏，4=秋。目标总利润=卖出价-买进价-库存成本，具体的线性规划模型如下：

$$\max \quad z=15x_{11}+30x_{12}+55x_{13}+45x_{14}+10x_{22}+35x_{23}+5x_{33}+25x_{24}-5x_{34}+5x_{44}$$
$$-\frac{1}{10000}\left[170\left(x_{12}+x_{23}+x_{34}\right)+270\left(x_{13}+x_{24}\right)+370x_{14}\right]$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}
x_{11}\le 100\\
x_{12}+x_{22}\le 140\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}\le 200\\
x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}\le 160\\
x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 20\\
x_{13}+x_{14}+x_{23}+x_{24}\le 20\\
x_{14}+x_{24}+x_{34}\le 20\\
x_{ij}\ge 0
\end{cases}$$

第二章

2.1 (1) min $w=5y_1+2y_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-y_1+2y_2\ge -2\\ 2y_1+3y_2\ge 4\\ y_1,y_2\ge 0\end{cases}$$

(2) min $w=5y_1+6y_2+12y_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2y_1+6y_2+10y_3\ge 2\\ y_1+5y_2-9y_3=2\\ -3y_1-y_2+6y_3\ge -5\\ -3y_1+5y_2=2\\ y_1\text{无约束},y_2\le 0,y_3\ge 0\end{cases}$$

(3) max $w=10y_1+8y_2+6y_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}y_1+2y_2\ge 3\\ y_1+\ y_3\le 2\\ -3y_1+2y_2+y_3\le -4\\ y_1-y_2+y_3=1\\ y_1\ge 0,y_2\le 0,y_3\text{无约束}\end{cases}$$

(4) max $w=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j$

s.t. $u_i+v_j\le c_{ij}$

$(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$

2.2 (1) 对偶问题为：

$$\min\ z=\mathbf{b}^T\mathbf{y}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\mathbf{A}^T\mathbf{y}\ge\mathbf{c}\\ \mathbf{y}\le\mathbf{0}\end{cases}$$

(2) 原问题$\mathbf{b}$被$\overline{\mathbf{b}}$替换后对应的对偶问题变为：

$$\min\ z=\overline{\mathbf{b}}^T\mathbf{y}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\mathbf{A}^T\mathbf{y}\ge\mathbf{c}\\ \mathbf{y}\le\mathbf{0}\end{cases}$$

显然，可行域没有变化，故$\mathbf{y}^*$仍是新问题的对偶问题的可行解。又$\overline{\mathbf{x}}$是新问题的可行解，由弱对偶性有：$\mathbf{c}^T\overline{\mathbf{x}}\le\overline{\mathbf{b}}^T\mathbf{y}^*$。

2.3 原问题的对偶问题为：

$$\min\ z=6y_1+7y_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}-y_1-3y_2\ge 3\\ 2y_1+y_2\ge 4\\ 3y_1-4y_2\ge 1\\ y_1,y_2\ge 0\end{cases}$$

该对偶问题无可行解，因此原问题无最优解。又$\mathbf{x}=(0,1,0)^T$是原问题的可行解，所以原问题具有无界解，即目标函数值无界。

2.4 该线性规划的对偶问题为：

$$\max\ w = 2y_1 + 3y_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} y_2 \le 3 \\ y_1 + y_2 \le 4 \\ y_1 - y_2 \le 2 \\ -5y_1 + y_2 \le 5 \\ 3y_1 + 2y_2 \le 9 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

求解对偶问题，得：$y_1^* = 1, y_2^* = 3$，最优目标函数值 $w^* = 11$。代入上述约束条件，可知第 3 个和第 4 个约束条件未达到上限，因此 $x_3^* = x_4^* = 0$。由 $y_1^* \ne 0, y_2^* \ne 0$，得原问题两个不等式约束条件在最优解时取到等号，并且最优时原问题与对偶问题目标函数值相等，于是

$$\begin{cases} x_2^* + 3x_5^* = 2 \\ x_1^* + x_2^* + 2x_5^* = 3 \\ 3x_1^* + 4x_2^* + 9x_5^* = 11 \end{cases}$$

求解，得：$x_1^* = 1 + x_5^*, x_2^* = 2 - 3x_5^*, x_5^* \ge 0$。所以原问题有无穷多个最优解，令 $x_5^* = 0$，可得一个最优解为 $(1,2,0,0,0)^T$。

2.5 (1) $\mathbf{x}^* = (0,16/3,0)^T$ (2) $x^* = (8,0,0)^T$

2.6 (1) 问题 B 相当于对问题 A 左乘了矩阵 $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，因此由 $y^T = c_B^T B^{-1}$，得：

$\hat{y}^T = c_B^T (PB)^{-1} = c_B^T B^{-1} P^{-1} = y^T P^{-1}$，即 $\hat{y}^T = y^T \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。展开得：$\hat{y}_1 = \frac{1}{3} y_1 - y_3$，$\hat{y}_2 = 3y_2$，$\hat{y}_3 = y_3$；(2) 没有变化。

2.7 原问题的最优解为 $x^* = (1,2,0)^T$。(1) 最优解变为 $x^* = (2,0,1)^T$；(2) 最优基不变，最优解变为 $x^* = (5,1,0)^T$；(3) 最优解变为 $x^* = (2,1,0)^T$。

2.8 (1) 原问题的最优解 $\mathbf{x}^* = (0,0,2)^T$，对偶问题的最优解 $\mathbf{y}^* = (2,0)^T$。

(2) 如果 x_1 系数改变，仅影响 x_1 的检验数。由

$$\sigma_1 = c_1 - \mathbf{c_B B}^{-1}\mathbf{P}_1 = c_1 - (2,0)\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix} = c_1 - 16 \le 0$$

得：$c_1 \le 16$，在此范围内最优解不发生改变。
如果 x_3 系数改变，则影响全部变量的检验数。由

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} - \mathbf{c_B B}^{-1}\mathbf{A} = (4,1,c_3,0,0) - (c_3,0)\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= (4 - 8c_3, 1 - 3c_3, 0, -c_3, 0) \le 0$$

即 $\begin{cases} 4-8c_3 \le 0 \\ 1-3c_3 \le 0 \\ -c_3 \le 0 \end{cases}$，得：$c_3 \ge \frac{1}{2}$，在此范围内最优解不发生改变。

(3) 如果 b_1 改变，则

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 8 \end{bmatrix} \ge 0$$

即 $\begin{cases} b_1 \ge 0 \\ -b_1 + 8 \ge 0 \end{cases}$，得：$0 \le b_1 \le 8$，在此范围内不影响最优基。

如果 b_2 改变，则

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ b_2 \end{bmatrix} \ge 0$$

即 $\begin{cases} 2 \ge 0 \\ -2 + b_2 \ge 0 \end{cases}$，得：$b_2 \ge 2$，在此范围内不影响最优基。

第三章

3.1 解：对于 m 个产地 n 个销地的平衡的运输问题而言，基变量的个数为 m+n-1 个；该运输问题一定有最优解；一组 *m*+*n*-1 个变量能构成基变量的充要条件是它不包含任何闭回路；若各产地的产量和销地的需求量都为整数，则任意可行解为整数解。

3.2 解：（1）可以作为初始方案，（2）不能作为初始方案。初始方案应为初始基可行解，要满足两个条件:基变量的个数为 m+n-1 个,基变量的不包含任何闭回路。

3.3 解：若某选择的基变量所在格对应的产地余量和销地余量恰好相等时会出现退化的基解。应先划去对应产地所在行/销地所在列，再在销地所在列/产地所在行的其它格中任选一个填 0 作为退化的基变量，最后再划去其所在的列/行。

3.4 解：S=100 件;D=110 件；问题为供不应求的运输问题。运价及供需平衡表：

产地＼销地	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$	产量/件
$A1$	0.87	0.7	0.65	0.74	20
$A2$	0.56	0.97	0.84	M	30
$A3$	0.78	0.75	0.76	0.9	50
虚拟 $A4$	0	0	0	0	10
销量/件	50	20	30	10	110

线性规划模型：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,...,3 \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, j = 1,...,4 \\ x_{ij} \ge 0, i = 1,...,3; j = 1,...,4. \end{cases}$$

3.5 证：因为划线法求初始基可行解时，基变量的值为其所在行/列的产量/需求量的余量。而所有产地的产量和销地的需求量都是整数，所以初始基可行解中基变量值为整数解。而在改进调运方案时，调整值等于入基变量所在闭回路顶点的序号中，所有序号为偶数的顶点的调运量的最小值，也为整数。所以，最优的调运方案中各线路的运量也都是整数。

3.6 解：一定有最优解。因为运输费用最小化问题是有下界的线性规划问题。可以根据各地需求分配各产地向各销地的运量，构造出可行解。对于有界且有可行解的线性规划问题一定有最优解。

3.7 解：（1）线性规划模型

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, j = 1,\dots,n \\ x_{ij} \ge 0, i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

（2）对偶问题的模型

$$\max \omega = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$s.t.\begin{cases} u_i + v_j \le c_{ij}, i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n \\ u_i \le 0, i = 1,\dots,m \\ v_j \ge 0, j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

令 $p_i = -u_i \ge 0$ 模型可转换为：

$$\max \omega = \sum_{i=1}^{m} a_i p_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$s.t.\begin{cases} v_j - p_i \le c_{ij}, i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n \\ p_i \ge 0, i = 1,\dots,m \\ v_j \ge 0, j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

（3）对偶变量p_i和v_j分别为产地和销地的产品价格，对偶问题表示产品在销地的价格与产地的价格差不能高于运价，否则消费者会直接在产地购买。

3.8 解：（1）这是供需平衡的运输问题，*Vogel* 法给出近似最优解：

	1	*2*	*3*

	b_1=9	b_2=10	b_3=11
A a_1=12	⑤ 5 **2** ⑤	② 1 **10**	M
B a_2=14	2 **3** ③	4	① 1 **11**
C a_3=4	3 **4** ④	6	7

对偶变量发求检验数：

	1 b_1=5	*2* b_2=1	*3* b_3=4
A a_1=0	5 ×	1 ×	M **M-4**
B a_2=-3	2 ×	4 **6**	1 ×
C a_3=4	3 ×	6 **7**	7 **5**

是最优解，目标值为 49。

（2）这是供过于求的运输问题；增加虚拟销地 B5 的销量 b_5=S-D=10。*Vogel* 法给出近似最优解：

	B_1 b_1=20	B_2 b_2=20	B_3 b_3=30	B_4 b_4=25	B_5 b_5=10
A_1 a_1=25	10	2	3 **25** ①	9	0
A_2 a_2=30	② 5 **20**	10	15	4 **10** ⑥	0
A_3 a_3=20	15	④ 5 **20**	14 **0** ⑤	15	0
A_4 a_4=30	20	15	⑧ 13 **5** ⑧	⑦ 8 **15**	③ 0 **10**

用对偶变量法求检验数。

	B_1 v_1=-1	B_2 v_2=-6	B_3 v_3=3	B_4 v_4=-2	B_4 v_5=-10

A_1 u_1=0	10 **11**	2 **8**	3 ×	9 **11**	0 **10**
A_2 u_2=6	5 ×	10 **10**	15 **12**	4 ×	0 **4**
A_3 u_3=11	15 **5**	5 ×	14 ×	15 **6**	0 **-1**
A_4 u_4=10	20 **11**	15 **11**	13 ×	8 ×	0 ×

检验数并不满足非负，然后转换基，发现该解也是最优解。目标值为 500。

3.9 解：S=8000 件;D=12000 件；问题为供不应求的利润最大化运输问题。增加虚拟产地 3，其产量=4000 件。最优的目标值为 282000 元。销地 2 和 3 的需求没有满足。运量表如下：

销地 产地	销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	产量（件）
产地 1 产地 2	0 2000	4000 0	0 0	1000 1000	5000 3000
需求量（件）	2000	5000	3000	2000	

3.10 解：（1）供不应求，计算丙公司可满足的最大需求=310 吨。

（2）供需平衡与运价表

销地 产地	甲 1	甲 2	乙	丙 1	丙 2	产量（吨）
鸡西煤矿	15	15	18	22	22	400
鹤岗煤矿	21	21	25	16	16	450
虚拟产地 3	M	0	M	M	0	30
需求量（吨）	290	30	250	270	40	880

（3）

$$\min z = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = a_i, i = 1,2 \\ b_{j\min} \le \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_{j\max}, j = 1,2,3 \\ x_{ij} \ge 0, i = 1,2; j = 1,2,3. \end{cases}$$

（4）鸡西煤矿给甲公司 150 吨，乙公司 250 吨；鹤岗煤矿给甲公司 140 吨，丙公司 310 吨。总调运费用为 14650 元。

3.11 解：（1）设 $c_{ij}{}' = p_j - c_i - c_{ij}$；$p_j$ 为销地 j 的产品售价，c_i 为产地 i 的单位生产成本，c_i 为产地 i 到销地 j 的运价。

$$\max z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}{}' x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = a_i, i = 1,2,3 \\ b_{j\min} \le \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_{j\max}, j = 1,\cdots,4 \\ x_{ij} \ge 0, i = 1,2,3; j = 1,\cdots,4. \end{cases}$$

（2）最优目标值为 31060 千元；A1 分别向 B2、B4 运 10、30 千箱；A2 分别向 B1、B4 运 40、30 千箱；A3 向 B2 运 60 千箱。

3.12 解：（1）总供给 S=14 车皮；总需求 D=12 车皮；供过于求。

（2）总运输费用为 419 千元。农基地 A1 向中转地 T2 运 1 车皮；农基地 A2 向中转地 T1 运 6 车皮；中转地 T1 向城市 B1、B2 运 2、4 车皮；中转地 T2 向城市 B3、B4 运 3、3 车皮。

3.13 解：（1）设 a_i 为节点 i 的供需差额，

$$\min z = \sum_{\text{所有弧}} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{\text{输出弧}} x_{ij} - \sum_{\text{输入弧}} x_{ji} = a_i, i = 1,\cdots,7 \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

（2）最小运输费用为 1049 千元。运输方案为：城市 2 向城市 5 运 9 台；城市 3 向城市 1 运 9 台；城市 4 向城市 2 运 4 台；城市 5 向城市 3、6 分别运 6、5 台；城市 7 向城市 4 运 7 台。

（3）若分公司 2 的过量供给为 8 台，则变为供过于求的问题。只要将供应剩余节点的等式约束改为小于等于约束即可。

3.14 **解**：这属于供过于求的情况，增加一个虚拟的需求点。另外，因为，时间的逻辑关系，本年的生产的飞机不能用于该年之前的飞机需求，所以令相应线路运价等于惩罚系数 M。飞机单位成本与供需表：

生产 \ 销售		第一年	第二年	第三年	虚拟需求	供应量
第一年	正常	500	530	560	0	2
	加班	550	580	610	0	2
第二年	正常	M	550	580	0	3
	加班	M	600	630	0	2
第三年	正常	M	M	600	0	3
	加班	M	M	650	0	3
需求量		**3**	4	5	3	15

经计算，最优生产计划方案，如表所示，最小总成本为 6840 万元。

生产 \ 销售		第一年	第二年	第三年	虚拟需求	供应量
第一年	正常	1	1			2
	加班	2				2
第二年	正常		3			3
	加班			2		2
第三年	正常			3		3
	加班				3	3
需求量		**3**	4	5	3	15

3.15 解：（1）设 x_{ij} 是从北方城市 i 到南方城市 j 的线路上的运量。设 c_{ij} 为从北方城市 i 到南方城市 j 的线路上不转机的人数。

$$\max z = \sum_{所有可行弧} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 1 \\ \sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

最优的解决方案中，有 110 人不需要转机。对应的航班目的地安排为：A1 到 B1；A2 到 B2；A3 到 B3；A4 到 B4；A5 到 B5；A6 到 B6。

（2）只要将约束改为：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le 1 \\ \sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

3.16 解：（1）该目标规划的满意解为

$X^*=(6,1)^T,d_1^-=8,d_1^+=0,d_2^-=0,d_2^+=0,d_3^-=0,d_3^+=0$

（2）该目标规划的满意解为 $X^*=(3,3)^T,d_1^-=0,d_1^+=0,d_2^-=0,d_2^+=4,d_3^-=0,d_3^+=0$

（3）该目标规划的满意解为 $X^*=(10,0)^T,d_1^-=0,d_1^+=0,d_2^-=6,d_2^+=0,d_3^-=16,d_3^+=0$

（4）该目标规划的满意解为 $X^*=(2,2)^T,d_1^-=8,d_1^+=0,d_2^-=8,d_2^+=0$

3.17 解：（1）该目标规划的满意解为 $X^*=(10,20,10)^T,d_1^-=0,d_1^+=0,d_2^-=0,d_2^+=0$

$d_3^-=0,d_3^+=0$

（2）该目标规划的满意解为 $X^*=(50,50)^T,d_1^-=0,d_1^+=10,d_2^-=20,d_2^+=0,d_3^-=0,d_3^+=0$

$d_4^-=0,d_4^+=0$

（3）该目标规划的满意解为 $X^*=(70,50)^T,d_1^-=0,d_1^+=40,d_2^-=0,d_2^+=0,d_3^-=0,d_3^+=0$

$d_4^-=60,d_4^+=0$

（4）该目标规划的满意解为 $X^*=(60,45)^T,d_1^-=0,d_1^+=25,d_2^-=0,d_2^+=0,d_3^-=0,d_3^+=0$

$d_4^-=0,d_4^+=15$

（5）该目标规划的满意解为 $X^*=(9000,7000)^T,d_1^-=0,d_1^+=0,d_2^-=0,d_2^+=0,d_3^-=0$

$d_3^+=5000,d_4^-=0,d_4^+=3000$

（6）该目标规划的满意解为 $X^*=(35.56,6.67,48.06,0)^T,d_1^-=0,d_1^+=12.28$

$d_2^-=0,d_2^+=18.06,d_3^-=0,d_3^+=0,d_4^-=0,d_4^+=0,d_5^-=0,d_5^+=0$

3.18 解：（1）设 A，B 两个郊县配置的消防车数量分别为 x_A 辆和 x_B 辆，则可建立相应的目标规划模型如下所示：

$$\min z=P_1d_1^++P_2d_2^++P_3d_3^+$$
$$\begin{cases}20(x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B})+d_1^--d_1^+=400\\ 40-3x_\mathrm{A}+d_2^--d_2^+=8\\ 50-4x_\mathrm{B}+d_3^--d_3^+=8\\ x_A,x_B,d_k^-,d_k^+\geq 0;\mathrm{k=1,\ 2,\ 3}\end{cases}$$

其满意解为：$X^*=(10.67,9.33)^T,d_1^-=0,d_1^+=0,d_2^-=0,d_2^+=0,d_3^-=0,d_3^+=4.67$

（2）若对优先级目标函数进行调整，将 P_2 调为 P_1，P_3 调为 P_2，P_1 调为 P_3，则新的目标规划模型如下所示：

$$\min z = P_1 d_2^+ + P_2 d_3^+ + P_3 d_1^+$$
$$\begin{cases} 20(x_A + x_B) + d_1^- - d_1^+ = 400 \\ 40 - 3x_A + d_2^- - d_2^+ = 8 \\ 50 - 4x_B + d_3^- - d_3^+ = 8 \\ x_A, x_B, d_k^-, d_k^+ \ge 0; \text{k=1, 2, 3} \end{cases}$$

其满意解为： $X^* = (10.67, 10.50)^T, d_1^- = 0, d_1^+ = 23.33, d_2^- = 0, d_2^+ = 0, d_3^- = 0, d_3^+ = 0$

3.19 解：设 $x_{ij}(i = A, B, C; j = \text{甲，乙，丙})$ 表示配制第 j 等级的品牌沥青所使用的第 i 等级的材料的用量。则根据题意，可建立如下目标规划的数学模型：

$$\min \omega = P_1(d_1^+ + d_2^- + d_3^+ + d_4^- + d_5^+ + d_6^-) + P_2 d_7^- + P_3 d_8^-$$
$$\begin{cases} x_{C甲} - 0.1(x_{A甲} + x_{B甲} + x_{C甲}) + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_{A甲} - 0.5(x_{A甲} + x_{B甲} + x_{C甲}) + d_2^- - d_2^+ = 0 \\ x_{C乙} - 0.7(x_{A乙} + x_{B乙} + x_{C乙}) + d_3^- - d_3^+ = 0 \\ x_{A乙} - 0.2(x_{A乙} + x_{B乙} + x_{C乙}) + d_4^- - d_4^+ = 0 \\ x_{C丙} - 0.5(x_{A丙} + x_{B丙} + x_{C丙}) + d_5^- - d_5^+ = 0 \\ x_{A丙} - 0.1(x_{A丙} + x_{B丙} + x_{C丙}) + d_6^- - d_6^+ = 0 \\ 5.5(x_{A甲} + x_{B甲} + x_{C甲}) + 5(x_{A乙} + x_{B乙} + x_{C乙}) + 4.8(x_{A丙} + x_{B丙} + x_{C丙}) \\ -6(x_{A甲} + x_{A乙} + x_{A丙}) - 4.5(x_{B甲} + x_{B乙} + x_{B丙}) - 3(x_{C甲} + x_{C乙} + x_{C丙}) + d_7^- - d_7^+ = z \\ x_{A甲} + x_{B甲} + x_{C甲} + d_8^- - d_8^+ = 2000 \\ x_{ij}, d_k^-, d_k^+ \ge 0; i = A, B, C; j = \text{甲，乙，丙}; \text{k=1, 2, . . . , 8} \end{cases}$$

其中，上式中的 z 由下列模型求出：

$$\max z = 5.5(x_{A甲} + x_{B甲} + x_{C甲}) + 5(x_{A乙} + x_{B乙} + x_{C乙}) + 4.8(x_{A丙} + x_{B丙} + x_{C丙})$$
$$-6(x_{A甲} + x_{A乙} + x_{A丙}) - 4.5(x_{B甲} + x_{B乙} + x_{B丙}) - 3(x_{C甲} + x_{C乙} + x_{C丙})$$
$$\begin{cases} x_{C甲} - 0.1(x_{A甲} + x_{B甲} + x_{C甲}) \le 0 \\ x_{A甲} - 0.5(x_{A甲} + x_{B甲} + x_{C甲}) \ge 0 \\ x_{C乙} - 0.7(x_{A乙} + x_{B乙} + x_{C乙}) \le 0 \\ x_{A乙} - 0.2(x_{A乙} + x_{B乙} + x_{C乙}) \ge 0 \\ x_{C丙} - 0.5(x_{A丙} + x_{B丙} + x_{C丙}) \le 0 \\ x_{A丙} - 0.1(x_{A丙} + x_{B丙} + x_{C丙}) \ge 0 \\ x_{A甲} + x_{B甲} + x_{C甲} \ge 2000 \\ x_{ij} \ge 0; i = A, B, C; j = \text{甲，乙，丙} \end{cases}$$

第四章

4.1 解：（1）该线性规划问题的最优解为 $X^* = (3.5, 2.5)^T$,最优值为 $Z^* = 15.5$，对应的整数规划的最优解为 $X^* = (3,2)^T$，最优值为 $Z^* = 13$，故不能用凑整的办法得到最优整数解。

（2）该线性规划问题的最优解为 $X^*=(3.25,2.5)^T$,最优值为 $Z^*=14.75$，对应的整数规划的最优解为 $X^*=(4,1)^T$，最优值为 $Z^*=14$，故不能用凑整的办法得到最优整数解。

4.2 解：（1）该整数规划的最优解为 $X^*=(0,6)^T$，最优值为 $Z^*=6$

（2）该整数规划的最优解为 $X^*=(3,1)^T$，最优值为 $Z^*=7$

（3）该整数规划的最优解为 $X^*=(3,1)^T$，最优值为 $Z^*=4$

（4）该整数规划的最优解为 $X^*=(2,3)^T$，最优值为 $Z^*=17$

（5）该整数规划的最优解为 $X^*=(5,5)^T$，最优值为 $Z^*=40$

（6）该整数规划的最优解为 $X^*=(51,0)^T$，最优值为 $Z^*=51$

4.3 解：（1）该整数规划的最优解为 $X^*=(1,1)^T$，最优值为 $Z^*=2$

（2）该整数规划的最优解为 $X^*=(4,3)^T$，最优值为 $Z^*=55$

（3）该整数规划的最优解为 $X^*=(2,1)^T$，最优值为 $Z^*=13$

（4）该整数规划的最优解为 $X^*=(2,3)^T$，最优值为 $Z^*=34$

（5）该整数规划的最优解为 $X^*=(1,2)^T$，最优值为 $Z^*=1$

（6）该整数规划的最优解为 $X^*=(2,1,1)^T$，最优值为 $Z^*=10$

4.4 解：（1）该整数规划的最优解为 $X^*=(1,0,0)^T$，最优值为 $Z^*=3$

（2）该整数规划的最优解为 $X^*=(1,1,1)^T$，最优值为 $Z^*=9$

（3）该整数规划的最优解为 $X^*=(0,1,1,0)^T$，最优值为 $Z^*=18$

（4）该整数规划的最优解为 $X^*=(1,0,1,1)^T$，最优值为 $Z^*=3$

（5）该整数规划的最优解为 $X^*=(1,0,1)^T$，最优值为 $Z^*=8$

（6）该整数规划的最优解为 $X^*=(1,0,0)^T$，最优值为 $Z^*=4$

4.5 解：设计划在 A_i 处建 x_i 座桥，则可建立整数规划模型如下所示：

$$\max z=\sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$s.t\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} d_i x_i \le D\\ 0\le x_i \le a_i\text{且为整数}; \text{i=1, 2, . . , n}\end{cases}$$

4.6 解：设工厂生产甲、乙两种设备的件数分别为 x_1 件和 x_2 件，则可建立整数规划模型如下所示：

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$s.t\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}$$

4.7 解：设若在 A_j 地点选择建立仓储中心，则 $x_j = 1$，否则 $x_j = 0$，则可以建立整数规模模型如下所示：

$$\max z = 36x_1 + 40x_2 + 50x_3 + 22x_4 + 20x_5 + 30x_6 + 25x_7 + 48x_8 + 58x_9 + 61x_{10}$$
$$s.t\begin{cases} \sum_{j=1}^{10} x_j \le 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ x_4 + x_5 \ge 1 \\ x_6 + x_7 \ge 1 \\ x_8 + x_9 + x_{10} \ge 2 \\ 100x_1 + 120x_2 + 150x_3 + 80x_4 + 70x_5 + 90x_6 + 80x_7 + 140x_8 + 160x_9 + 180x_{10} \le 720 \\ x_j = 0\text{或}1，j = 1, 2, ..., 10 \end{cases}$$

4.8 解：设 f_1，f_2 和 f_3 表示是否生产小号锅炉、中号锅炉和大号锅炉的决策，若 f_1=1，则表示生产小号锅炉，f_1=0 则表示不生产小号锅炉；若 f_2=1，则表示生产中号锅炉，f_2=0 则表示不生产中号锅炉；若 f_3=1，则表示选择生产大号锅炉，f_3=0 则表示不选择生产大号锅炉。而 x_1, x_2 和 x_3 则表示小号锅炉、中号锅炉和大号锅炉的生产量，则可建立相关整数规划模型如下：

$$\max z = 4f_1x_1 + 5f_2x_2 + 6f_3x_3 - 100f_1 - 150f_2 - 200f_3$$
$$s.t\begin{cases} 2f_1x_1 + 4f_2x_2 + 8f_3x_3 \le 500 \\ 2f_1x_1 + 3f_2x_2 + 4f_3x_3 \le 300 \\ f_1x_1 + 2f_2x_2 + 3f_3x_3 \le 100 \\ x_1, x_2, x_3 > 0; f_1, f_2, f_3 = 0\text{或}1 \end{cases}$$

4.9 解：设 x_{ij} 表示第 i 个工人对第 j 项工作的指派决策。若 x_{ij}=1，则表示将第 i 个工人派去完成第 j 项工作，若 x_{ij}=0，则表示不将第 i 个工人派去完成第 j 项工作，其中 i 为甲、乙、丙、丁，j 为 A、B、C 和 D。则可建立整数规划模型如下所示：

$$
\begin{aligned}
\min z = & 15x_{甲A}+18x_{甲B}+21x_{甲C}+24x_{甲D}+19x_{乙A}+23x_{乙B}+22x_{乙C}+18x_{乙D} \\
& +26x_{丙A}+17x_{丙B}+16x_{丙C}+19x_{丙D}+19x_{丁A}+21x_{丁B}+23x_{丁C}+17x_{丁D}
\end{aligned}
$$

$$
s.t\begin{cases}
\sum_{j=A}^{D} x_{甲j}=1;\sum_{j=A}^{D} x_{乙j}=1;\sum_{j=A}^{D} x_{丙j}=1;\sum_{j=A}^{D} x_{丁j}=1 \\
\sum_{i=甲}^{丁} x_{iA}=1;\sum_{i=甲}^{丁} x_{iB}=1;\sum_{i=甲}^{丁} x_{iC}=1;\sum_{i=甲}^{丁} x_{iD}=1 \\
x_{ij}=0或1, i=甲, 乙, 丙, 丁; j=A,B,C,D
\end{cases}
$$

4.10 解：设 x_{ij} 表示第 i 年初第 j 个项目可投入的投资额度，其中 $i=1,2,...,5$；$j=A,B,C,D$。f_k 表示项目 C 对于投资额的选择，若 f_1=1，则表示选择 2 万的投资额，f_1=0 则表示不选择 2 万的投资额；若 f_2=1，则表示选择 4 万的投资额，f_2=0 则表示不选择 4 万的投资额；若 f_3=1，则表示选择 6 万的投资额，f_3=0 则表示不选择 6 万的投资额；若 f_4=1，则表示选择 8 万的投资额，f_4=0 则表示不选择 8 万的投资额。则可建立整数规划模型如下所示：

$$
\max z = 1.15x_{4A}+1.28x_{3B}+1.40x_{2C}+1.06x_{5D}
$$

$$
s.t\begin{cases}
x_{1A}+x_{1D}=10, x_{1A}\ge 4; \\
1.06x_{1D}=x_{2A}+x_{2C}+x_{2D}, x_{2C}=2f_1+4f_2+6f_3+8f_4; \\
1.15x_{1A}+1.06x_{2D}=x_{3A}+x_{3B}+x_{3D}, 3\le x_{3B}\le 5; \\
1.15x_{2A}+1.06x_{3D}=x_{4A}+x_{4D} \\
1.15x_{3A}+1.06x_{4D}=x_{5D} \\
f_1+f_2+f_3+f_4=1 \\
x_{ij}\ge 0, \; i=1,2,3,4,5; j=A,B,C,D; f_1,f_2,f_3,f_4=0或1
\end{cases}
$$