第5次作业

1. （均匀分布的普遍性）随机变量 X 服从(0, 1/2)上的均匀分布，X 的累积分布函数为 $F(x)$。U 服从区间 (0，1) 上的均匀分布。令 $Y=F^{-1}(U)$；证明：Y 的累积分布函数为$F(y)$。

2. 设随机变量 X 的概率密度函数为$f(x)$，$f(x)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}2t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t$，求$P(X>2)$；

3. 俄亥俄州克利夫兰市的年降雨量近似为均值为 40.2 英寸、标准差为 3.8 英寸的正态随机变量：

   (1) 定义事件 A：下一年降雨量超过 44 英寸；事件 B：接下来 5 年中，正好有 3 年的降雨量超过 44 英寸；求事件 A 和 B 各自发生的概率；

   (2) 克利夫兰市降雨量的上 0.05 分位点是多少，该分位点的现实意义是什么？

4. 设随机变量 $X\sim N(\mu,1)$，

   (1) 求随机变量$Y=aX+b$ 的概率密度；

   (2) 当$a=-1$，$b=0$时，在坐标系中画出 X 和 Y 的密度函数曲线；

5. Alice 试图通过一个有噪声信道向 Bob 传送一个是-否问题的答案。她将“是”记为 1，“否”作为 0，并发送相应的值。然而信道中存在噪声，Bob 所接收到的信息会加上一个服从$N(0,\sigma^2)$分布的噪声（噪声与 Alice 所发送的信息相互独立）。如果 Bob 接收到的值大于 1/2，那么就将其解释为“是”；否则，将其解释为“否”。

   (1) 求 Bob 能正确理解 Alice 信息的概率；

   (2) 如果 σ 非常小，那么（1）中的结果会怎么样？如果 σ 非常大，结果又将如何呢？试从直观上解释，为什么在这些极端情况下的结果是有意义的；