第5章 特征函数

5.1 定义

- 数字特征只反映概率分布的某些侧面，一般并不能通过它们来完全确定分布函数，下面将要引进的特征函数，既能完全决定分布函数，又具有良好的分析性质。

- 为了定义特征函数，需要稍微拓广一下随机变量的概念，引进复随机变量。

定义 5.1

如果ξ与η都是概率空间上的实值随机变量，则称$\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$为**复随机变量**。

从定义知道，对复随机变量的研究本质上是对二维随机向量的研究。

这里举一个例子：如果二维向量(ξ_1,η_1)与(ξ_2,η_2)是独立的，则称复随机变量$\zeta_1=\xi_1+\mathrm{i}\eta_1$与$\zeta_2=\xi_2+\mathrm{i}\eta_2$是独立的。

- 定义一个复随机变量$\zeta=\xi+i\eta$的数学期望为

$$\mathrm{E}(\zeta)=\mathrm{E}(\xi)+i\mathrm{E}(\eta)$$

- 对复随机变量也可以平行于实随机变量建立起一系列结果。例如，若$\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n$ 是相互独立的，则

$$\mathrm{E}(\zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_n)=\mathrm{E}(\zeta_1)\mathrm{E}(\zeta_2)\cdots\mathrm{E}(\zeta_n)$$

- 又如，若$g(x)$ 是一个一元博雷尔可测函数，且$\eta=g(\xi)$，则

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{it\eta})=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{itg(\xi)})=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{itg(x)}\mathrm{d}F_\xi(x) \qquad (5.1)$$

这里常用欧拉公式 $\mathrm{e}^{it\eta}=\cos(t\eta)+i\sin(t\eta)$

下面引进随机变量ξ的特征函数，

- **定义 5.2**：
  若随机变量ξ的分布函数为$F_\xi(x)$，则称

$$f_\xi(t)=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{it\xi})=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}F_\xi(x) \qquad (5.2)$$

为ξ的**特征函数**（*characteristic function*）

- 特征函数是一个实变量的复值函数，由于$|\mathrm{e}^{itx}|=1$，所以它对一切实数t都有意义。

- 显然特征函数只与分布函数有关，因此亦称某一分布函数的特征函数。

- 对于**离散型**随机变量，若其分布律为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \cdots & x_n \cdots \\ p_1 & p_2 \cdots & p_n \cdots \end{pmatrix}$$

则其特征函数为

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_j} \qquad (5.3)$$

➢ 对于连续型随机变量，若其分布密度函数为 $p(x)$，则其特征函数为

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{itx}p(x)\mathrm{d}x \qquad (5.4)$$

这时，特征函数是密度函数 $p(x)$ 的傅里叶（*Fourier*）变换。

➢ 一般情况下的特征函数可以看作是这种傅里叶变换的推广。

➢ 傅里叶分析是数学中一种非常有力的工具，它在许多数学分支中都起了重大作用，它在概率论中占有突出的地位。

下面指出一些重要分布的特征函数。

[例 1] 退化(单点)分布 $I(x-c)$的特征函数为

$$f(t)=\mathrm{e}^{ict} \qquad (5.5)$$

[例 2] 二项分布 $b(n,p)$ 的特征函数为

$$f(t)=(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+q)^n \qquad （5.6）$$

[例3] 泊松分布$\pi(\lambda)$的特征函数为

$$f(t)=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)} \qquad （5.7）$$

➢[例 4] Γ分布 $G(\lambda, r)$ 的特征函数为

$$f(t)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\infty \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda(1-\frac{\mathrm{i}t}{\lambda})x}\mathrm{d}x$$

$$=(1-\frac{\mathrm{i}t}{\lambda})^{-r} \tag{5.8}$$

5.2 性质

下面介绍特征函数的一些基本性质。

性质 1 特征函数 $f(t)$ 有如下性质：

$$f(0)=1 \tag{5.9}$$

$$|f(t)| \le f(0) \tag{5.10}$$

$$f(-t)=\overline{f(t)} \tag{5.11}$$

[证明]

$$f(0)=\int_{-\infty}^{\infty}1\mathrm{d}F(x)=1$$

$$|f(t)|\le\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}|\mathrm{d}F(x)=1=f(0)$$

$$f(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x)$$

$$=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x)}=\overline{f(t)}$$

性质2 特征函数在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续

[证明] 因为

$$\left|f(t+h)-f(t)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+h)x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\right)\mathrm{d}F(x)\right|$$

$$\leq\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}hx}-1\right|\mathrm{d}F(x)\leq 2\int_{|x|\geq A}\mathrm{d}F(x)+\int_{-A}^{A}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}hx}-1\right|\mathrm{d}F(x)$$

$$=2\int_{|x|\geq A}\mathrm{d}F(x)+2\int_{-A}^{A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\mathrm{d}F(x)$$

注意上式右边已与 t 无关；可选足够大的 A 使 $\int_{|x|\geq A}\mathrm{d}F(x)$ 任意小，然后选充分小的 $|h|$ 可使第二个积分也任意小，从而证明了结论。

性质 3 对于任意的正整数 n，任意实数 $t_1,t_2,\cdots t_n$ 及复数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，成立

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_k-t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j}\geq 0 \qquad (5.12)$$

[证 明]

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_k-t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_k-t_j)x}\mathrm{d}F(x)\right\}\lambda_k\overline{\lambda_j}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_k-t_j)x}\lambda_k\overline{\lambda_j}\right\}\mathrm{d}F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_kx}\lambda_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_jx}\overline{\lambda_j}\right)\mathrm{d}F(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_kx}\lambda_k\right|^2\mathrm{d}F(x)\geq 0$$

- 这个性质称为**非负定性**，以后我们将会看到，这是特征函数最本质的性质之一。

性质4 两个相互独立的随机变量之和的特征函数等于它们的特征函数之积。

[证明]

设 ξ_1 与 ξ_2 是两个相互独立的随机变量，而 $\eta=\xi_1+\xi_2$，由 ξ_1 与 ξ_2 的独立性不难推得复随机变量 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi_1}$ 与 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi_2}$ 也是独立的，因此

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\eta})=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\xi_1+\xi_2)})=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi_1})\cdot\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi_2})$$

性质 4 可推广到 n 个独立随机变量之和的场合。

- 应当着重指出，正是由于性质 4，才使特征函数在概率论中占有重要地位。

- 由于这个性质，独立随机变量和的特征函数可以方便地用各个特征函数相乘来求得，而独立和的分布函数要通过复杂的运算才能得到.

- 相比之下，用特征函数来处理独立和问题就有力得多. 独立和问题在概率论的古典问题中占有“中心”地位，而这些问题的解决大大有赖于特征函数的引进。

性质 5 设随机变量 ξ 有 n 阶矩存在。则它的特征函数可微分 n 次，且当 $k \le n$ 时：

$$f^{(k)}(0) = \mathrm{i}^k \mathrm{E}(\xi^k) \qquad (5.13)$$

[证明]

$$\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx})\right| = |\mathrm{i}^k x^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}| = |x|^k$$

由于ξ的k阶矩存在，故$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k\mathrm{d}F(x)<\infty$,因而可作下列积分号下的微分

$$f^{(k)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx})\mathrm{d}F(x)$$

$$=\mathrm{i}^k\int_{-\infty}^{\infty}x^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x)$$

取$t=0$即得 （5.13）

性质 5 使我们可以方便地求得随机变量的各阶矩。

推论 若随机变量ξ有n阶矩存在，则它的特征函数可作如下展开：

$$f(t)=1+(\mathrm{i}t)\mathrm{E}(\xi)+\frac{(\mathrm{i}t)^2}{2!}\mathrm{E}(\xi^2)+\cdots+\frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!}\mathrm{E}(\xi^n)+o(t) \qquad (5.14)$$

[证明]

由性质 5，$f(t)$ 可以在$t=0$近旁作泰勒展开，公式（5.14）就是在带有泰勒余项的展开式中，代入（5.13）式而得到的.

性质 6 设 $\eta = a\xi + b$，这里 a, b 为常数，则

$$f_\eta(t) = \mathrm{e}^{ibt} f_\xi(at) \tag{5.15}$$

[证明]

$$\begin{aligned} f_\eta(t) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{it\eta}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{it(a\xi+b)}) \\ &= \mathrm{e}^{itb}\mathrm{E}(\mathrm{e}^{ita\xi}) = \mathrm{e}^{ibt} f_\xi(at) \end{aligned}$$

例 5 正态分布 $N(a,\sigma^2)$ 的特征函数，先讨论 $N(0,1)$ 的场合：

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(tx)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

由于正态分布一阶矩阵存在，可对上式求导，得

$$f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-x)\sin(tx)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(tx)\cdot\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin(tx)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t\cos(tx)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=-tf(t)$$

因此，

$$\ln f(t) = -\frac{t^2}{2} + c$$

由于 $f(0)=1$，所以 $c=0$ ，这样一来，

$$f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \tag{5.16}$$

一般 $N\left(a,\sigma^2\right)$ 的场合，利用性质 6 即得

$$f(t) = \mathrm{e}^{iat-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \tag{5.17}$$

5.3 逆转公式与唯一性定理

- 现在来证明特征函数与分布函数是相互唯一确定的，由分布函数决定特征函数是显然的，剩下来的是需要证明可由特征函数唯一决定分布函数。
- 下面定理的证明要用到如下数学分析的引理。

引理 5.1 设 $x_1 < x_2$

$$g(T,x,x_1,x_2)=\frac{1}{\pi}\int_0^T\left[\frac{\sin t(x-x_1)}{t}-\frac{\sin t(x-x_2)}{t}\right]\mathrm{d}t \quad (5.18)$$

则

$$\lim_{T\to\infty} g(T,x,x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x<x_1\text{或}x>x_2\\ \frac{1}{2}, & x=x_1\text{或}x=x_2\\ 1, & x_1<x<x_2\end{cases} \quad (5.19)$$

[证明] 从数学分析中知道狄拉克克雷积分

$$D(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}\mathrm{d}t=\begin{cases}1/2, & \alpha>0\\ 0, & \alpha=0\\ -1/2, & \alpha<0\end{cases} \qquad (5.20)$$

而

$$\lim_{T\to\infty} g(T,x,x_1,x_2)=D(x-x_1)-D(x-x_2)$$

分别考察 x 在区间 (x_1,x_2) 的端点及内外时相应狄利克雷积分的值即得（5. 19).

定理 5.1(逆公式)

设分布函数 $F(x)$ 的特征函数为 $f(t)$，又 x_1, x_2 是 $F(x)$ 的连续点，则

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t}f(t)\mathrm{d}t \qquad (5.21)$$

[证明] 不妨设 $x_1<x_2$，记

$$\begin{aligned}I_T&=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t}f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

为证被积函数的有界性，用到不等式

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1\right|\le|\alpha|$$

事实上，对 $\alpha>0$

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1\right|=\left|\mathrm{i}\int_0^{\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x\right|\le\int_0^{\alpha}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|\mathrm{d}x=\alpha$$

对 $\alpha\le 0$, 取共轭即知也成立。因此

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t x_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t x_2}}{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\right|\le x_2-x_1$$

交换上述二次积分顺序得到,

$$
\begin{aligned}
I_T &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{T}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(x-x_1)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x-x_1)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(x-x_2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x-x_2)}}{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{T}\left(\frac{\sin t(x-x_1)}{t}-\frac{\sin t(x-x_2)}{t}\right)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(T,x,x_1,x_2)\mathrm{d}F(x)
\end{aligned}
$$

➢ 此处 $g(T,x,x_1,x_2)$ 按（5.18）定义．由（5.19）知（5.18）$\left|g(T,x,x_1,x_2)\right|$ 有界，因此由勒贝格控制收敛定理（交换顺序）并利用引理的结果可得：

$$\lim_{T\to\infty} I_T = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} g(T,x,x_1,x_2)\mathrm{d}F(x)$$

$$= F(x_2) - F(x_1)$$

定理5.2（唯一性定理）分布函数由其特征函数唯一决定。

[证明] 应用逆转公式，在 $F(x)$ 的每一连续点上，当 y 沿 $F(x)$ 的连续点趋于 $-\infty$ 时，有

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to-\infty}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}}{\mathrm{i}t}f(t)\mathrm{d}t \quad (5.22)$$

而分布函数由其连续点上的值唯一决定。

由唯一性定理可知特征函数也完整地描述了随机变量。

定理 5.3 若 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$，则相应的分布函数 $F(x)$ 的导数存在并连续，而且

$$F'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}f(t)\mathrm{d}t \qquad (5.23)$$

[证明] 由逆转公式，若 $x+\Delta x$ 及 x 是 $F(x)$ 的连续点，则

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}}{\mathrm{i}t\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$

利用 $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1\right|\le|\alpha|$，可得

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}}{\mathrm{i}t\Delta x}\right|\le 1$$

依假设 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$，因此

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}}{\mathrm{i}t\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$

利用控制收敛定理

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}}{\mathrm{i}t\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}f(t)\mathrm{d}t$$

- 因此 $p(x)=F'(x)$ 存在而有界. 再次利用控制收敛定理即得 $F'(x)$ 的连续性.
- 因此在 $f(t)$ 是绝对可积的条件下，分布密度 $p(x)$ 与特征函数 $f(t)$ 通过傅里叶变换来联系.

5.4 分布函数的再生性

许多重要的分布函数具有一个有趣的性质——再生性。这个性质用特征函数来研究最为方便。下面通过几个例子来说明它。

[例 6] 若 ξ_1 服从 $b(m,p)$，ξ_2 服从 $b(n,p)$，而且 ξ_1 与 ξ_2 独立，则 $\eta=\xi_1+\xi_2$ 服从 $b(m+n,p)$。

事实上，$f_{\xi_1}(t)=\left(pe^{it}+q\right)^m, f_{\xi_2}(t)=\left(pe^{it}+q\right)^n$，由性质 4 知

$$f_\eta(t)=\left(pe^{it}+q\right)^{m+n}$$

因此由唯一性定理知 η 服从 $b(m+n,p)$.

这个事实简记作

$$b\left(n_1,p\right)*b\left(n_2,p\right)=b(n_1+n_2,p) \tag{5.24}$$

例 7 若 ξ_1 服从泊松分布 $\pi(\lambda_1)$， ξ_2 服从 $\pi(\lambda_2)$，而且 ξ_1 与 ξ_2 独立，则

$\eta=\xi_1+\xi_2$ 服从 $\pi(\lambda_1+\lambda_2)$.

事实上

$$f_{\xi_1}(t)=\mathrm{e}^{\lambda_1\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1\right)},\ f_{\xi_2}(t)=\mathrm{e}^{\lambda_2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1\right)}$$

$$f_{\eta}(t)=\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1\right)}$$

这个结论简记为 $\pi(\lambda_1)*\pi(\lambda_2)=\pi(\lambda_1+\lambda_2)$ (5.25)

例 8 若 ξ_1 服从 $N\left(a_1,\sigma_1^2\right)$， ξ_2 服从 $N\left(a_2,\sigma_2^2\right)$，而且 ξ_1 与 ξ_2 独立，则 $\eta=\xi_1+\xi_2$ 服从 $N\left(a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$.

事实上

$$f_{\xi_1}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_1t-\frac{1}{2}\sigma_1^2t^2},\ f_{\xi_2}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_2t-\frac{1}{2}\sigma_2^2t^2}$$

$$f_{\eta}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a_1+a_2)t-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}$$

这个事实简记作

$$N\left(a_1,\sigma_1^2\right)*N\left(a_2,\sigma_2^2\right)=N\left(a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right) \tag{5.26}$$

例 9　若ξ_1服从$G(\lambda,r_1)$,ξ_2服从$G(\lambda,r_2)$，而且ξ_1与ξ_2独立，则$\eta=\xi_1+\xi_2$服从$G\left(\lambda,r_1+r_2\right)$.

- 事实上，由（5.8）

$$f_{\xi_1}(t)=\left(1-\frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-r_1},\ f_{\xi_2}(t)=\left(1-\frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-r_2}$$

$$f_{\eta}(t)=\left(1-\frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-(r_1+r_2)}$$

这个事实简记作

$$G(\lambda_1,r_1)*G(\lambda_2,r_2)=G(\lambda,r_1+r_2) \qquad (5.27)$$

- 还有研究这类命题的逆命题——分布函数的分解问题，即若两个独立随机变量之和服从某一分布，问是否能断定这两个随机变量也分别服从这个分布。

- 已经证明对于正态分布及泊松分布逆命题的确成立。

5.5 多元特征函数

➢ 若随机向量$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，与一维随机变量相仿，可以定义它的特征函数

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}dF(x_1,\cdots,x_n) \quad (5.28)$$

➢ 可以类似于一元的场合，建立起n元特征函数的理论，由于方法完全相同，只叙述一些有关结论，证明一概从略.

➢ 性质 1

$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 在 R^n 中一致连续，而且

$$|f(t_1,t_2,\cdots,t_n)|\le f(0,0,\cdots,0)=1$$

$$f(-t_1,-t_2,\cdots,-t_n)=\overline{f(t_1,t_2,\cdots,t_n)}$$

性质 2： 如果 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 是 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的特征函数，则 $\eta=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n$ 的特征函数为

$$f_\eta(t)=f(a_1t,a_2t,\cdots,a_nt)$$

- **性质 3**

如果矩$\mathrm{E}(\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n})$存在，则

$$\mathrm{E}(\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n}) = \mathrm{i}^{-\sum_{j=1}^{n}k_j}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right]_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0} \qquad (5.29)$$

性质**4**： 若$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的特征函数为$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，则$k(k<n)$维随机向量$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)$的特征函数为

$$f_{1,2,\cdots,k}(t_1,t_2,\cdots,t_k) = f(t_1,t_2,\cdots,t_k,0,\cdots,0)$$

- 这是前 k 个分量的 k 元边际分布函数对应的特征函数.

- 对应于任意 k 个分量$\xi_{j_1},\xi_{j_2},\cdots,\xi_{j_n}$的边际分布函数的特征函数，可以类似得到.

逆转公式

如果 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 是随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的特征函数，而 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是它的分布函数，则

$$P\{a_k \le \xi_k < b_k, k=1,2,\cdots,n\}$$
$$=\lim_{\substack{T_j\to\infty \\ j=1,\cdots,n}} \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-T_1}^{T_1}\int_{-T_2}^{T_2}\cdots\int_{-T_n}^{T_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_k a_k}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_k b_k}}{\mathrm{i}t_k}$$
$$\bullet f(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$$

其中 a_k 和 b_k 都是任意实数，但满足唯一的要求：$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 落在平行体 $a_k \le x_k < b_k, k=1,2,\cdots,n$ 的面上的概率等于零.

- **唯一性定理**

  分布函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$由其特征函数唯一决定.

有了唯一性定理，可以进一步证明特征函数的如下两个性质，它们表征了独立性.

➢ **性质 5**

若$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的特征函数为$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，而$\xi_j$的特征函数为$f_{\xi_j}(t), j=1,2,\cdots,n$,则随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立的充要条件为

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_{\xi_1}(t_1)f_{\xi_2}(t_2)\cdots f_{\xi_n}(t_n)$$

➢ 性质 6

若以$f_1(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，$f_2(u_1,u_2,\cdots,u_m)$及$f(t_1,t_2,\cdots,t_n,u_1,u_2,\cdots,u_m)$分别记随机向量$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$及$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$的特征函数，则$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$与$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$相互独立的充要条件为：

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n,u_1,u_2,\cdots,u_m)=f_1(t_1,t_2,\cdots,t_n)f_2(u_1,u_2,\cdots,u_m)$$

对一切实数$t_1,t_2,\cdots,t_n$及$u_1,u_2,\cdots,u_m$成立

连续性定理：若特征函数列$\{f_k(t_1,t_2,\cdots,t_n)\}$收敛于一个连续函数$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$,则$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是某个分布函数所对应的特征函数。

5.6 特征函数的应用

在求数字特征上的应用

- 求$N(\mu,\sigma^2)$分布的数学期望和方差

由于$N(\mu,\sigma^2)$的分布的特征函数为$\varphi(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$，

于是由$\varphi^{(k)}(0)=\mathrm{i}^k\,\mathrm{E}(\xi^k)$ 得，

$$\mathrm{iE}(\xi)=\varphi'(0)=\mathrm{i}\,\mu$$

$$\mathrm{i}^2\mathrm{E}(\xi^2)=\varphi''(0)=-\mu^2-\sigma^2$$,

由此即得

$$\mathrm{E}(\xi)=\mu,\ \mathrm{D}(\xi)=\mathrm{E}(\xi^2)-(\mathrm{E}(\xi))^2=\sigma^2$$

在求独立随机变量和的分布上的应用

➢ 利用归纳法，不难把性质 4 推广到 n 个独立随机变量的场合，设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，相应的特征函数为

$$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t) \ ,$$

则 $\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 的特征函数为

$$\varphi(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_i(t)$$

注：性质 4：独立随机变量和的特征函数为特征函数的积，即设

X 与 Y 相互独立，则 $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)$

➢ 设 $\xi_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个相互独立的，且服从正态分布 $N(a_j,\sigma_j^2)$ 的正态随机变量.试求

$$\xi=\sum_{j=1}^{n}\xi_j$$ 的分布.

由于 ξ_j 的分布为 $N(a_j,\sigma_j{}^2)$，故相应的特征为 $\varphi_j(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_jt-\frac{\sigma_j^2t^2}{2}}$

由特征函数的性质 $\varphi(t)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(t)$ 可知 ξ 的特征函数为

$$\varphi(t)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(t)=\prod_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_jt-\frac{\sigma_j^2t^2}{2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)t-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)t^2}$$

而这正是 $N(\sum_{j=1}^{n}a_j,\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2)$ 的特征函数。

由分布函数与特征函数的一一对应关系即知 ξ 服从 $N(\sum_{j=1}^{n}a_j,\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2)$。

在证明二项分布收敛于正态分布上的应用

➢ 在 n 重贝努力实验中，事件 A 每次出现的概率为 $p(0<p<l)$,

μ_n 为 n 次试验中事件 A 出现的次数,则

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

➢要证明上述结论只需证明下面的结论，因为它是下面的结论一个特例. 若$\xi_1,\xi_2,\cdots$ 是一列独立同分布的随机变量

$$\mathrm{E}(\xi_k)=a,\mathrm{D}(\xi_k)=\sigma^2(\sigma^2>0),k=1,2,\cdots,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k-na}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

证明

设$\xi_k - a$的特征函数为$\varphi(t)$则

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - na}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k - a}{\sigma\sqrt{n}}$$ 的特征函数为$[\varphi(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})]^n$

又因为$E(\xi_k - a) = 0, D(\xi_k - a) = \sigma^2$，所以$\varphi'(0) = 0, \varphi''(0) = -\sigma^2$

于是特征函数$\varphi(t)$有展开式

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \varphi''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + o(t^2)$$

从而对任意的t有，

$$\left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n \to e^{-\frac{t^2}{2}}, n \to \infty$$

而 $e^{-\frac{t^2}{2}}$ 是 $N(0,1)$ 分布的特征函数，由连续定理可知

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

成立，证毕。

在$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$中

μ_n是服从二项$P\{\mu_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, 0 \le k \le n.$的随机变量，上面的结论称为“二项分布收敛于正态分布”.

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

为“泊松分布收敛于正态分布”。