第三章 多维随机变量及其分布

- 3.1 二维随机变量
- 3.2 边缘分布
- 3.3 条件分布
- 3.4 相互独立的随机变量
- 3.5 两个r.v.的函数的分布
- 3.6 随机变量函数的联合分布
- 3.7 n 维随机变量简介

多维随机变量

- 在某些实际问题中，往往需要同时用两个或两个以上的随机变量来描述试验的结果；
  - 例如某地区对儿童进行抽查身体，测量被抽儿童的身高 H 和体重 W，这里样本空间 $S=\{$某地区的全部儿童$\}$，而 $H(e)$ 和 $W(e)$ 是定义在 S上的两个随机变量.
  - 学生的成绩，需要考虑多个科目；
  - 企业经营状况，需要考虑多个指标；

多维随机变量

N 维 r.v. 定义: 设 E 是一个随机试验，样本点是e， 若$X_1(e), X_2(e), \ldots, X_n(e)$ 是定义在样本空间上 e 的 n 个随机变量，则称 $X(e) = (X_1(e), X_2(e), \cdots, X_n(e)), e \in S$

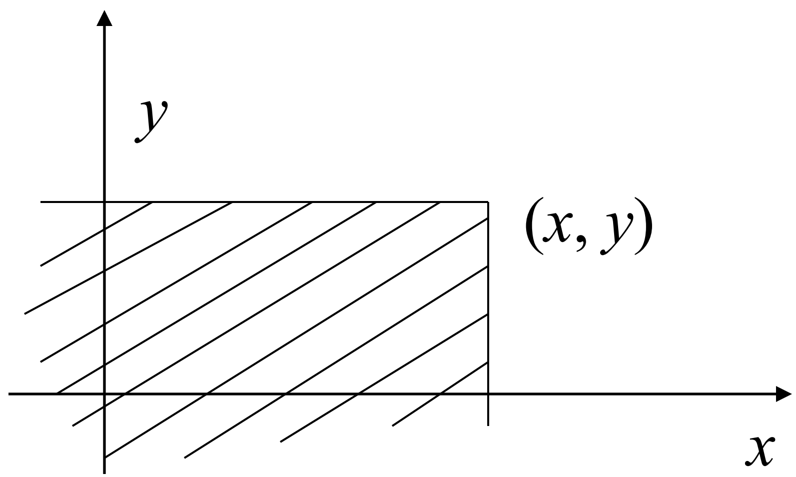
构成一个 n 维随机变量，简记为 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

3.1 二维随机变量

- 二维 r.v. (联合) 分布函数:

对于任意的实数x, y, 二元函数 $F(x, y) = P\{\{X \le x\} \cap \{Y \le y\}\} \overset{\Delta}{=}$ $P\{X \le x, Y \le y\}$ 称为二维 r.v.(X, Y) 的分布函数, 或称为 r.v. X 和Y 的联合分布函数.

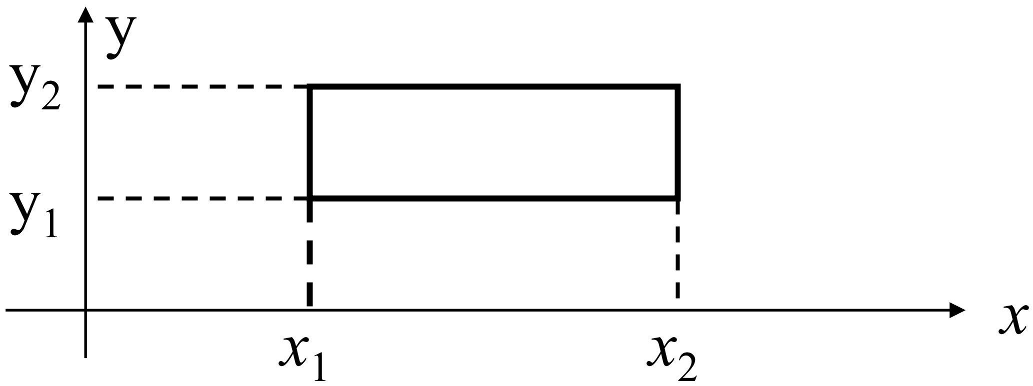
- 若将 (X, Y) 看成平面上随机点的坐标，则分布函数$F(x, y)$ 的值为 (X, Y) 落在阴影部分的概率 (如图1)



二维r.v.(联合)分布

则随机点落在矩形域 $[x_1 < X \le x_2; y_1 < Y \le y_2]$ 的概率为

$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$



- 二维 r.v. 的分布函数的基本性质与一维 r .v. 的分布函数 $F(x)$ 的性质类似，如下列出：

(1) $F(x, y)$ 是变量 x 或 y 的单调不减函数，即

$$\text{当}x_1 < x_2\text{时，}F(x_1, y) \le F(x_2, y);$$
$$\text{当}y_1 < y_2\text{时，}F(x, y_1) \le F(x, y_2).$$

(2) $0 \le F(x, y) \le 1$, 且 $F(x, -\infty) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$

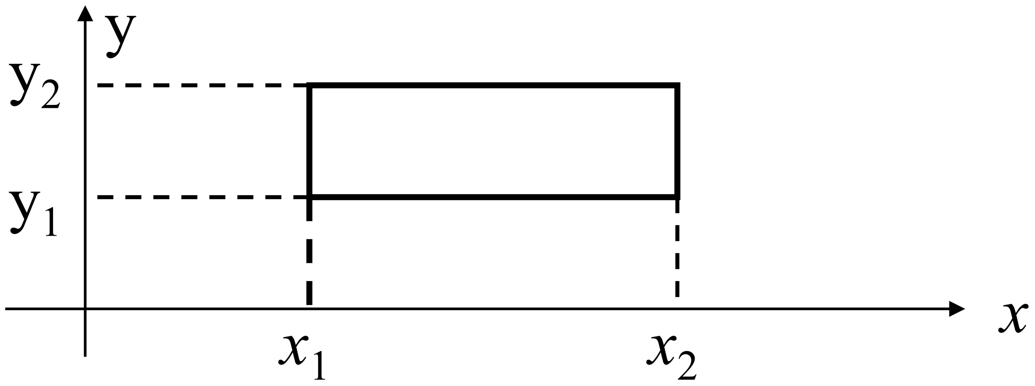
$$F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$$
$$F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$$

(3) $F(x, y)$关于 x, y 都是右连续的，即

$$F(x+0, y) = F(x, y),\quad F(x, y+0) = F(x, y)$$

(4) 对于任意实数$x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$,有

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$$



二维离散型和连续型 r.v. 的分布

- 二维离散型 r.v. 的分布律

若二维r.v.(X,Y)的所有可能取值是有限多对或可列多对，则称(X,Y)为 二维离散型 r.v.

记$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,3,\cdots$

称 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots$为二维离散型r.v. X 和 Y 的联合分布律或联合概率分布，简称为 (X, Y) 的分布律或概率分布.

显然分布律满足$p_{ij}\geq 0$， $\sum_i\sum_j p_{ij}=1.$

例1. 一袋子中有 5 个球，其中 2 个球上标有数字“1”，3个球上标有数字“0”，采用有放回和无放回两种方式取球，X 表示第一次取得的数字，Y 表示第二次取得的数字，求 (X,Y) 的联合分布率。

解: (X,Y) 的所有可能取值为$(0, 0), (0,1), (1, 0), (1,1)$

(1)有放回取球，对应概率为

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0|X=0\}=3/5\times3/5=9/25$$

类似地 $P\{X=1, Y=0\}=6/25$,

$P\{X=0,Y=1\}=6/25$,

$P\{X=1,Y=1\}=4/25$

(X,Y) 的分布律为

$x \backslash y$	0	1
0	9/25	6/25
1	6/25	4/25

(2) 无放回取球，对应概率为

$$P\{X=0,\ Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0|X=0\}=3/5\times 2/4=3/10$$

类似地 $P\{X=1,Y=0\}=3/10,$

$P\{X=0,Y=1\}=3/10$

$P\{X=1,Y=1\}=1/10$

(X,Y) 的分布律写成表格为:

x \ y	0	1
0	3/10	3/10
1	3/10	1/10

回 顾

- 为什么要研究多维随机变量？
- 多维随机变量分为哪两种类型？
- 二维随机变量的联合分布函数？
  - $F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$
  - $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$
    $= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$
- 离散二维随机变量的分布律怎么求？

例2. 设 $r.v.$ X 在1, 2, 3, 4 四个整数中等可能地取值, $r.v.$ Y 则在1~X 中等可能地取一整数, 试求 (X, Y) 的分布律.

解：X与Y的可能取值分别为1 , 2, 3, 4,

故(X, Y)所有可能取值是有限对(最多16 对数)，由乘法公式:

$$P\{X=i,Y=j\}=\begin{cases} P\{X=i\}P\{Y=j\mid X=i\}=1/(4i), i\geq j, \\ 0, \quad i<j. \end{cases}$$

(X,Y)的分布律为：

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	0	1/8	1/12	1/16
3	0	0	1/12	1/16
4	0	0	0	1/16

在已知二维离散随机变量的分布律的条件下，如何计算它的分布函数？

若已知(X,Y)的分布律，则分布函数可表示为: $F(x,y)=\sum\limits_{\substack{x_i\le x\\ y_j\le y}} p_{ij}$,

即对一切满足 $x_i \le x, y_j \le y$ 的 i,j 求和.

例2(续)：设 r.v. X 在1, 2, 3, 4 四个整数中等可能地取值，r.v. Y 则在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数，试求 $F(4, 3)$.

解：X与Y的可能取值分别为1 , 2, 3, 4,

Y \ X	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	0	1/8	1/12	1/16
3	0	0	1/12	1/16
4	0	0	0	1/16

二维连续型 r.v. 的联合概率密度

定义: 若对二维随机变量(X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$，存在非负函数 $f(x,y)$, 对任意 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称 (X, Y) 为连续型的二维 **r. v.**，其中函数 $f(x,y)$ 称为 (X,Y) 的联合概率密度，简称概率密度。

联合密度函数$f(x, y)$的性质:

1: $f(x, y) \geq 0;$

2: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(+\infty, +\infty) = 1;$

3: 若$f(x, y)$在点(x, y)连续, 则有$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y);$

联合密度函数$f(x, y)$的性质:

4: 设G是xoy平面上的一个区域, 点(X, Y) 落在G 内的概率为:

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注: 二维连续型 r.v. (X, Y) 落在平面 G 上概率，就等于密度函数 $f(x, y)$ 在 G 上的积分，这就将概率的计算转化为一个二重积分的计算了.

例2. 设二维 r.v. (X, Y)具有概率密度$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$

求：(1)常数A；(2)分布函数$F(x,y)$；(3) 概率$P\{Y\le X\}$.

解：(1) 由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$, 则

$$\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} Ae^{-(2x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1,$$

$$\text{即}A\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y=1$$

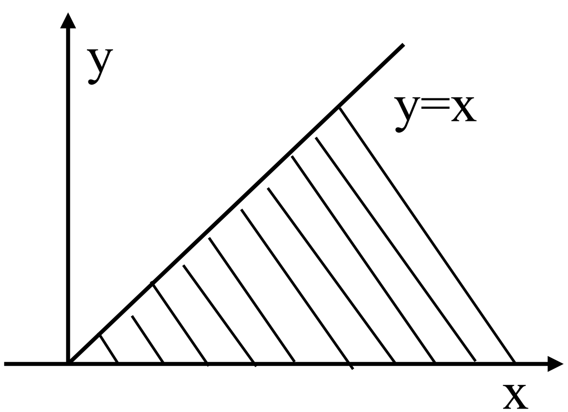
$$\Rightarrow A/2=1, \quad \therefore A=2.$$

$$(2)\ F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x 2\mathrm{e}^{-(2u+v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-y}), & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$(3)\ P\{Y\le X\}=\iint\limits_{y\le x} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1/3.$$



二维均匀分布

- 设 G 是平面上的有界区域, 面积为 A, 若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度 $f(x,y)$, 则称 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布.

$$f(x,y)=\begin{cases}1/A, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

- 若区域 G_1 是 G 内的面积为 A_1 的子区域, 则有:

$$P\{(X,Y)\in G_1\}=\iint_{G_1} 1/A\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A_1/A$$

- 这表明概率只与 G_1 的面积有关, 与位置形状无关.

二维正态分布

设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

其中 μ_1, μ_2, $\sigma_1(>0)$, $\sigma_2(>0)$, $\rho(|\rho|<1)$ 均为常数，则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布，记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

下面验证$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，先计算$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$,

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$ （作变换$x-\mu_1=\sigma_1 u$，$y-\mu_2=\sigma_2 v$）

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2-2\rho uv+v^2]\}\mathrm{d}v$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2-2\rho uv+v^2]\}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2]\right\}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$$

显然 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x=1.$

3.2 边缘分布

➢ 边缘分布函数：

对于二维 r.v.(X,Y), 它作为一个整体，具有分布函数$F(x,y)$，而 X 和 Y 都是r.v.，分别也有分布函数，记为$F_X(x)$、$F_Y(y)$, 称为二维 r.v. (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数.

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x,\ Y < +\infty\} = F(x,\ +\infty) \qquad (3.1)$$

同理

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) \qquad (3.2)$$

边缘分布律：

- 二维离散型随机变量 (X, Y) 的分量 X,Y 都是一维离散型随机变量;
- X, Y 的分布律 $P\{X=x_i\}(i=1, 2, \ldots)$、$P\{Y=y_j\}$分别称为 (X,Y) 关于 X, Y 的边缘分布律。

设 (X, Y) 的联合分布律 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}\,(i,j=1,2,\ldots)$，则关于 X 的边缘分布律为：

$$P\{X=x_i\}=P\{X=x_i, Y<+\infty\}=P\{X=x_i, Y=y_1\}+P\{X=x_i, Y=y_2\}+\cdots=\sum_j p_{ij}$$

简记为 $$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}\,(i=1,2,\ \cdots)$$

同理，关于 Y 的边缘分布律为：

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}\quad (j=1,2,\cdots)$$

例1. 一袋子中有 5 个球，其中 2 个球上标有数字“1”，3个球上标有数字“0”，采用有放回和无放回两种方式取球，X 表示第一次取得的数字，Y 表示第二次取得的数字，求 (X,Y) 的联合分布率。

例1 (续) 求关于 X 和 Y 的边缘分布律。

$x \backslash y$	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
p_k	3/5	2/5	1

无放回取球

$x \backslash y$	0	1	
0	9/25	6/25	3/5
1	6/25	4/25	2/5
p_k	3/5	2/5	1

有放回取球

两种取球方式下边缘分布均为:

X	0	1
p_k	3/5	2/5

Y	0	1
p_k	3/5	2/5

联合分布可以确定边缘分布, 反之则不行.

例2（续）

$Y \backslash X$	1	2	3	4	$p_{\bullet j}$
1	1/4	1/8	1/12	1/16	**25/48**
2	0	1/8	1/12	1/16	**13/48**
3	0	0	1/12	1/16	**7/48**
4	0	0	0	1/16	**3/48**
$p_{i\bullet}$	**1/4**	**1/4**	**1/4**	**1/4**	**1**

设 (X,Y) 为二维离散型 r.v.，则 r.v. X 的分布函数为

$$F_X(x)=\sum_{x_i\le x}P\{X=x_i\}$$

由 边缘分布律的定义有：

$$F_X(x)=\sum_{x_i\le x}P\{X=x_i\}=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}$$

边缘概率密度

设二维连续型 r.v.(X, Y), 概率密度为 $f(x, y)$, X, Y 的概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$ 分别称为 (X, Y) 关于 X, Y 的边缘概率密度;

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u$$

所以，关于X的边缘密度为:

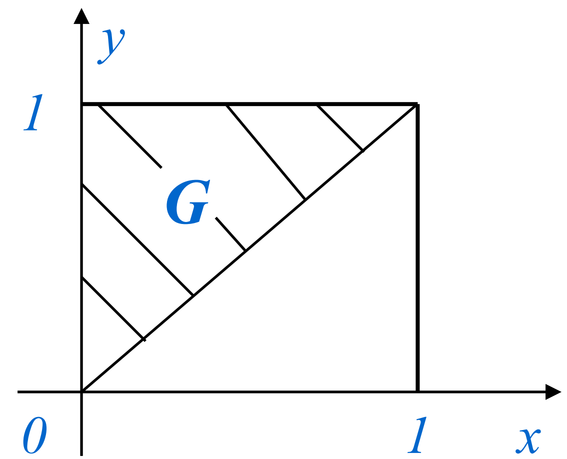
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y,$$

同理， $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x$

例3. 设 (X, Y) 在 G 上服从均匀分布，求其边缘密度。

解：因 G 的面积为1/2，所以

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & (x,y)\in G\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



当 $0\le x\le 1$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_x^1 2\mathrm{d}y=2-2x$$

当 x 取其它值时，因 $f(x,y)=0$，所以 $f_X(x)=0$，综上得

$$f_X(x)=\begin{cases}2-2x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

类似可得:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y 2\mathrm{d}x=2y & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

- 虽然 (X, Y) 在 G 上服从均匀分布，其两个边缘分布却不服从均匀分布。

例4 设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，求：边缘密度 $f_X(x), f_Y(y)$

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

解：$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6\mathrm{d}y=6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}} 6\mathrm{d}x=6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

例5 二维正态分布： $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

$-\infty<x,y<+\infty$,

- X 和 Y 的边缘分布？

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \quad (作变换x-\mu_1=\sigma_1 u,\ y-\mu_2=\sigma_2 v)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2-2\rho uv+v^2]\right\}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2]\right\}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$$

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$$

可以求得 X,Y 的边缘分布：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

注:

✓ 由二维随机变量 (X,Y) 的概率分布 (X,Y) 的联合分布可唯一地确定 X 和 Y 的边缘分布；

✓ 反之，若已知 X,Y 的边缘分布，并不一定能确定它们的联合分布；

3.3 条件分布

➢ 二维离散型 r.v. 的情况:

设 (X,Y) 具有分布律 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\ i=1,2,\cdots,$

X 和 Y 的边缘分布律分别为:

$$P\{X=x_i\}=p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij},\ i=1,2,\cdots,$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij},\ j=1,2,\cdots,$$

设 $p_{i\bullet} > 0$, $p_{\bullet j} > 0$, 有:

$$P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}}$$

$$= \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \quad i = 1, 2, \cdots \qquad (3.1)$$

由于$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}\geq 0$，且 $\sum_{i=1}^{+\infty} P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}=1$

故 $P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$， $i=1,2,\cdots$ 为在 $Y=y_j$条件下

$r.v.$ X 的条件分布律.

同样：$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\dfrac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, j=1,2,\cdots \quad (3.2)$

称为在$X=x_i$条件下 r.v. Y 的条件分布律.

例1. 设 (X, Y) 的分布律为:

$X \backslash Y$	5	7	13	18	20
1	0.08	0.01	0	0.02	0.14
2	0.11	0.10	0.09	0.01	0.04
3	0.03	0.07	0.15	0.06	0.09

求在 $X=2$ 时 Y 的条件分布律.

$X \backslash Y$	5	7	13	18	20
2	0.11	0.10	0.09	0.01	0.04

解：$P\{X=2\}=p_{2\bullet}=0.11+0.10+0.09+0.01+0.04=0.35,$

则 $P\{Y=5|X=2\}=0.11/0.35=11/35,$

$P\{Y=7|X=2\}=10/35,\quad P\{Y=13|X=2\}=9/35,$

$P\{Y=18|X=2\}=1/35,\quad P\{Y=20|X=2\}=4/35.$

用表格形式表示为:

k	5	7	13	18	20
$P\{Y=k\|X=2\}$	11/35	10/35	9/35	1/35	4/35

例2. 一射击手进行射击, 击中目标的概率为 p $(0<p<1)$，射击到击中目标两次为止， 设以 X 表示首次击中目标进行的射击次数，以 Y 表示总共进行的射击次数，试求：

(1) X 和 Y 的联合分布律；

(2) 边缘分布律；

(3) 条件分布律；

解：(1) (X, Y)的分布律为

$$P\{X=m, Y=n\}=P\{X=m\}P\{Y=n|X=m\}$$

$$=pq^{m\text{-}1}\cdot pq^{n\text{-}m\text{-}1}=p^2q^{n\text{-}2},\ n=2,3,\cdots;\ m=1,2,\cdots,n\text{-}1.$$

(2) 边缘分布律为

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{+\infty}p^2q^{n\text{-}2}=p^2\frac{q^{m-1}}{1-q}=pq^{m-1}\quad (m=1,2,\cdots,)$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n\text{-}2}=(n-1)p^2q^{n-2}\quad (n=2,3,\cdots.)$$

(3) **条件分布律：当** $n=2,3,\cdots$**时,**

$$P\{X=m\mid Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1}\quad(m=1,2,\cdots,n-1)$$

当 $m=1,\ 2,\ \cdots$ **时,**

$$P\{Y=n\mid X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}\quad(n=m+1,m+2,\cdots)$$

例 3 – 保险公司认为人可以分为两类，一类易出事故，另一类则不易出事故.

- 统计表明,一个易出事故者在一年内发生事故的概率为 0.4，而对不易出事故者来说，这个概率则减少到 0.2,
- 若假定第一类人占人口的比例为 30%，现有一个新人来投保，那么该人在购买保单后一年内将出事故的概率多大?

解 –以这个投保客户是不是易出事故者作为条件,我们将得到所求概率.

–令 A_1 表示"投保客户一年内将出事故"这一事件,

–以 A 表示"投保人为容易出事故者"这一事件,

–则所求概率 $P(A_1)$为

$$P(A_1)=P(A_1|A)P(A)+P(A_1|\overline{A})P(\overline{A})=0.4\times0.3+0.2\times0.7=0.26$$

例 4 保险公司认为人可以分为不同的两类，一是易出事故的，另一类是不易出事故的．第一类人占 3/10．

- 在任意给定的一年内，易出事故的人将发生事故的概率为 0.4，而对不易出事故的人来说，此概率为 0.2．
- 若已知某新保险客户在第一年已出过一次事故，问他在保险有效的第二年又出一次事故的条件概率是多大？

解 –如果令 A 表示“该保险客户是易出事故者”这一事件,

–A_i $(i=1,2)$ 表示“他在第 i 年出一次事故”.

–那么，以他是不是易出事故者为条件,

–可以算出所求概率 $P(A_2|A_1)$如下:

$$P(A_2 \mid A_1) = P(A_2 \mid AA_1)\,P(A \mid A_1) + P(A_2 \mid \bar{A}A_1)\,P(\bar{A} \mid A_1)$$

而

$$P(A \mid A_1) = \frac{P(A_1 A)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1 \mid A)P(A)}{P(A_1)}$$

- 但是例 3 中已经假设 $P(A)=3/10$，且算出了 $P(A_1)=0.26$,
- 因此

$$P(A|A_1)=\frac{0.4\times0.3}{0.26}=\frac{6}{13}$$

- 从而

$$P(\overline{A}|A_1)=1-P(A|A_1)=\frac{7}{13}$$

- 因为 $P(A_2|AA_1)=0.4$, $P(A_2|\overline{A}A_1)=0.2$,
- 所以

$$P(A_2|A_1)=0.4\times\frac{6}{13}+0.2\times\frac{7}{13}\approx0.29$$

- 二维连续型 r.v. 的情况

首先 引入条件分布函数， 然后得到条件概率密度.

(1) 条件分布函数的定义：

给定y, $\forall \varepsilon > 0$, $P\{y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\} > 0$, 若以下极限存在

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} P\left\{X \le x \mid y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{P\left\{X \le x, y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\right\}}{P\left\{y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\right\}}$$

称此极限为在条件 $Y=y$ 下 X 的条件分布函数,

记作 $F_{X|Y}(x|y)$ 或$P\left\{X \le x \mid Y = y\right\}$.

进一步可以化为:

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{(F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon))/(2\varepsilon)}{(F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y-\varepsilon))/(2\varepsilon)}$$

$$=\frac{\partial F(x,y)/\partial y}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)}=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y)\mathrm{d}u}{f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}u$$

若记 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

则称$f_{X|Y}(x\mid y)$为在条件$Y=y$下X的条件概率密度；

类似地有 $F_{Y|X}(y\mid x)=\int_{-\infty}^{y}f_{Y|X}(v\mid x)\mathrm{d}v$及$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

回 顾

- 一维随机变量及其分布
  - 离散型：分布律、分布函数（几种典型的分布）
  - 连续型：分布函数、密度函数（几种典型的分布）
- 二维随机变量的分布
  - 联合分布、边缘分布、条件分布
    - 离散型：分布律、分布函数
    - 连续型：密度函数、分布函数（几种典型的分布）
- 要求：定义（内涵）、性质、求参数、求分布律、求各种分布函数和密度函数、计算概率值；

例3. 设 (X,Y) 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上服从均匀分布，求：

(1) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$;

(2) 条件分布函数 $F_{Y|X}(y\mid x)$;

(3) $P\{0\le Y\le \frac{\sqrt{3}}{2}\mid X=\frac{1}{2}\}$

解：(1) $f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$

$\therefore f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x,\quad -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}$

当 $-1<y<1$ 时有：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}1/(2\sqrt{1-y^2}), & -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{dy}$$

当$-1 < x < 1$时

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$
$$= \begin{cases} 1\big/(2\sqrt{1-x^2}), & -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(2) 在 $X=x$ 条件下 Y 的条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y\,|\,x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(v\,|\,x)\mathrm{d}v$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y=1,\ y\geq\sqrt{1-x^2}\\ 0,\ y<-\sqrt{1-x^2}\\ \displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{y}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}+1\right),\\ \qquad -\sqrt{1-x^2}\leq y<\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

(3) $$P\{0 \le Y \le \frac{\sqrt{3}}{2} \mid X = \frac{1}{2}\} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f_{Y|X}(y \mid \frac{1}{2}) \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$

方法2：当$X=x=\dfrac{1}{2}$时，令上式中$x=\dfrac{1}{2}$，得

$$F_{Y|X}(y\mid\frac{1}{2})=\begin{cases}0, y<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{y}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le y<\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 1, y\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

所以 $P\{0\le Y\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mid x=\dfrac{1}{2}\}=F_{Y|X}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mid\dfrac{1}{2})-F_{Y|X}(0\mid\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$

例3. 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机地取值, 当观察到 $X=x$ $(0<x<1)$ 时, 数 Y 在区间 $(x, 1)$ 上随机地取值，求 Y 的边缘概率密度.

解： 按题意, $X \sim f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$

又在 $X = x$ 条件下, Y 的条件分布概率密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1/(1\text{-}x), & x < y < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

故得 $f(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \begin{cases} 1/(1-x), & 0<x<y<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \int_0^y 1/(1-x)\mathrm{d}x = -\ln(1-y), & 0<y<1. \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

3.4 相互独立的随机变量

若两个事件 A, B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A, B 相互独立；两个事件相互独立的概念可引入到随机变量上来.

定义：设 (X, Y) 为二维随机变量，若对于所有的 x, y 有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\} \cdot P\{Y \le y\}$$

则称随机变量 X 和 Y 相互独立.

即 $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \Leftrightarrow X$ 与 Y 相互独立.

例1 (X,Y) 的联合分布 $F(x,y)$ $\lambda_1,\lambda_2>0.$ 证明 X 与 Y 独立。

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}+\mathrm{e}^{-(\lambda_1 x+\lambda_2 y)}, x>0, y>0\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

证：因为$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases}$$

显然$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，所以X,Y相互独立。

定理：如果(X,Y)是二维离散型随机变量，则X,Y相互独立的充要条件是：对任意的一对值(x_i, y_j)有

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},\ i,j=1,2,\cdots$$

即$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}\,(i,j=1,2,\cdots)$

证明（充分性）：设$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}(i,j=1,2,\cdots)$，则

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}P\{X=x_i, Y=y_j\}$$

$$=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

$$=\sum_{x_i\le x}P\{X=x_i\}\sum_{y_j\le y}P\{Y=y_j\}$$

$$=F_X(x)F_Y(y)$$

所以X,Y相互独立。

（必要性）

若它们相互独立，则对(X,Y)的任意对可能取值(x_i,y_j)，取$x<x_i, y<y_j$，有

$$P\{x<X\le x_i\}=F_X(x_i)-F_X(x),$$

$$P\{y<Y\le y_j\}=F_Y(y_j)-F_Y(y),$$

两端分别相乘得

$$P\{x<X\le x_i\}\cdot P\{y<Y\le y_j\}$$
$$=F_X(x_i)\cdot F_Y(y_j)-F_X(x_i)\cdot F_Y(y)-F_X(x)\cdot F_Y(y_j)+F_X(x)\cdot F_Y(y)$$
$$=P\{x<X\le x_i, y<Y\le y_j\}$$

令$x\to x_i^-, y\to y_j^-$，根据概率连续性定理可证必要性。

由于 $P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\dfrac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}$，若 X 与 Y 独立，则有

$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=P\{X=x_i\}$, 即条件概率等于无条件概率。

前面例子有放回取球试验中 X,Y 独立，无放回则 X, Y 不独立，射击试验中 X,Y 独立？

例1. 一袋子中有 5 个球，其中 2 个球上标有数字“1”，3个球上标有数字“0”，采用有放回和无放回两种方式取球，X 表示第一次取得的数字，Y 表示第二次取得的数字，求 (X,Y) 的联合分布率。

$x \backslash y$	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
p_k	3/5	2/5	1

无放回取球

$x \backslash y$	0	1	
0	9/25	6/25	3/5
1	6/25	4/25	2/5
p_k	3/5	2/5	1

有放回取球

有放回取球试验中 X,Y 独立，无放回则 X, Y 不独立。

例2. 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为：

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 (X, Y) 的分布律.

解：因为 X 与 Y 相互独立，所以

X \ Y	2	4	$p_{i\cdot}$
1	0.18	0.12	0.3
3	0.42	0.28	0.7
$p_{\cdot j}$	0.6	0.4	1

X \ Y	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

回 顾

- **联合分布：**
  - 分布函数： $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$
  - 密度函数： $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
- **边缘分布：**
  - 分布函数： $F_X(x)=P\{X\le x,\ Y<+\infty\}$； $F_Y(y)=F(+\infty,y)$
  - 密度函数：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y,\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

- **条件分布：**
  - 分布函数：
  - 密度函数： $F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x \mid Y=y\}$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\qquad f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

回 顾

- 哪一种分布携带的信息量最大，联合/条件/边缘?
- 由联合分布能导出条件或者边缘分布吗?
- 由边缘分布能导出联合或者条件分布吗?
- 随机变量X与Y相互独立：
  - 定义： $P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\} \cdot P\{Y \le y\}$
  - 离散型随机变量独立的充要条件： $p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j} (i, j = 1, 2, \cdots)$
  - 连续型随机变量独立的充要条件：？？

定理：如果 (X, Y) 是二维连续型随机变量，则 X,Y 相互独立的充要条件是: 在 $f(x, y)$的连续点 (x, y)处，有

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

证明： 充分性 若$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$则

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_X(u) f_Y(v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(u) \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{y} f_Y(v) \mathrm{d}v$$

$$= F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

必要性： 若 X, Y 相互独立，即 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$.

将上式两边对 x, y 求导得

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=f(x,y)=F_X'(x)\cdot F_Y'(y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

定理证毕！

- 关于 X,Y 边缘分布一般不能确定 (X,Y) 联合分布，但是如果 X, Y 独立，则联合分布可由边缘分布唯一确定。

例3: 设 X 和 Y 都服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布且相互独立, 试求 $P\{X+Y\leq 1\}$.

解：设 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 分别为 X 和 Y 的密度函数，则

$$f_X(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, x\geq 0, \\ 0, \quad x<0, \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, y\geq 0, \\ 0, \quad y<0, \end{cases}$$

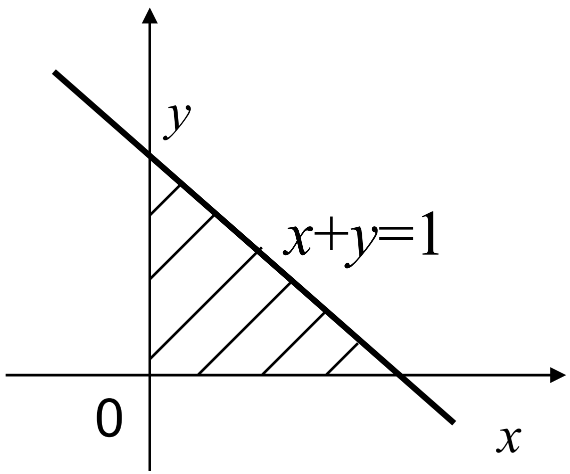
由于X与Y相互独立，故其联合密度函数为$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

故 $P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$

$=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\left[\int_0^{1-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$

$=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\left[1-\mathrm{e}^{x-1}\right]\mathrm{d}x$

$=1-2\mathrm{e}^{-1}\approx 0.2642.$

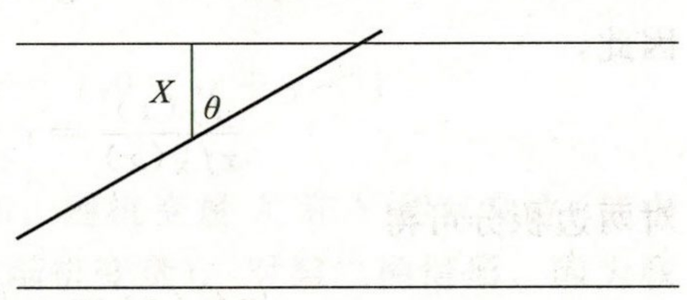


例4 (蒲丰投针问题) 桌面上画着一些平行线, 它们之间的距离都是D, 向此桌面上随意投掷一长度为L的针, 其中 $L \le D$. 问此针与桌面上的某一根平行线相交的概率是多大? (另一种可能是此针正好在某两条平行线之间)?

解： 首先，我们需要确定针的位置

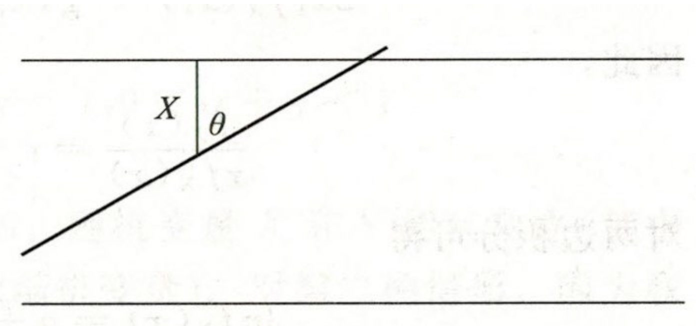
(1)从针的中点向距离该点最近的一条平行线引一条垂直线, 设这条垂线的长度为X；

(2)设针与这条垂直线的夹角为 θ , 垂直线、平行线以及针所在直线会形成一个直角三角形.



➢ 若直角三角形的斜边长小于$L/2$时，针会与这一条直线相交，即若

$$\frac{X}{\cos\theta}<\frac{L}{2} \quad 或 \quad X<\frac{L}{2}\cos\theta$$



则针与这一条平行线相交；

又因为X是一个取值于0到$D/2$之间的随机变量，θ取值于0到$\pi/2$之间；

➢ 假定 X 和 θ相互独立且在各自取值范围内服从均匀分布(这个假定是很合理的).

因此：$$P\left\{X<\frac{L}{2}\cos\theta\right\}=\iint_{X<(L\cos\theta)/2} f_X(x)f_\theta(\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta=\frac{4}{\pi D}\int_0^{\pi/2}\int_0^{(L\cos\theta)/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{\pi D}\int_0^{\pi/2}\frac{L}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2L}{\pi D}$$

例5. 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~12时，他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7~9时，设他们两人到达的时间相互独立，求他们到达办 公室的时间相差不超过 5 分钟的概率.

解：设 X 和 Y 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间，

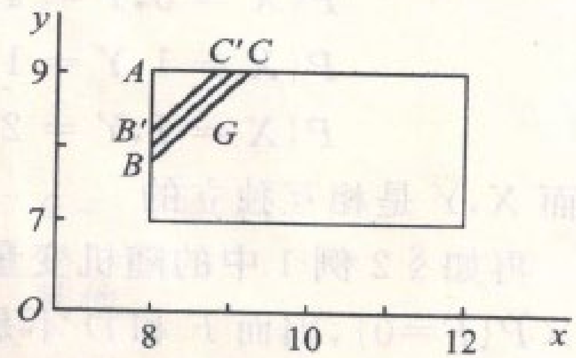
由假设 X 和 Y 的概率密度分别为：

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4, & 8 < x < 12 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & 7 < y < 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由于 X,Y 相互独立，得 (X,Y) 的概率密度为：

$$f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} 1/8, & 8<x<12, 7<y<9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

按题意需要求概率 $P\{|X-Y|\leqslant 1/12\}$. 画出区域: $|x-y|\leqslant 1/12$, 以及长方形 $[8<x<12; 7<y<9]$, 它们的公共部分是四边形 $BCC'B'$, 记为 G (如图 3-8). 显然仅当 (X, Y) 取值于 G 内, 他们两人到达的时间相差才不超过1/12小时. 因此, 所求的概率为



$$P\{|X-Y|\leq 1/12\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{的面积}) =\frac{1}{48}$$

G 的面积 = 三角形 ABC 的面积 − 三角形 $AB'C'$ 的面积

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{1}{6}$$

命题：设 (X, Y) 服从二维正态分布，则 X, Y 相互独立的充要条件是 $\rho = 0$.

证明：充分性是显然的, 当$\rho = 0$ 时, 有

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

反之, 若$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，即

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

令$x=\mu_1, y=\mu_2$, 则有 $\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$

所以: $\rho=0$.

若X,Y 相互独立，则$f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_X(x)$，即条件密度等于无条件密度。

定理：设 $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$ 相互独立，则 $X_i\,(i=1, 2, \ldots m)$ 和 $Y_j\ (j=1, 2, \ldots n)$ 相互独立，又若 h, g 是连续函数，则 $h(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$ 相互独立。

例4. 已知 (X,Y) 的分布律为

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
p_{ij}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	α	β

(1) 求 α 与 β 应满足的条件;

(2) 若 X 与 Y 相互独立，求 α 与 β 的值.

解：将 (X,Y) 的分布律改写为：

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\bullet}=P\{X=x_i\}$
1	$1/6$	$1/9$	$1/18$	$1/3$
2	$1/3$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_{\bullet j}=P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	$\frac{2}{3}+\alpha+\beta$

(1) 由分布律的性质知 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0,\ \frac{2}{3}+\alpha+\beta=1,$

故α与β应满足的条件是：$\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 且 $\alpha+\beta=\frac{1}{3}.$

(2) 因为 X 与 Y 相互独立, 所以有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \quad (i = 1,2;\ j = 1,2,3)$$

特别有:

$$p_{12} = p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + \alpha\right) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{9},$$

又 $\alpha + \beta = \dfrac{1}{3}$, 得 $\beta = \dfrac{1}{9}$.

3.5 两个 r.v.的函数的分布

问题：已知 $Z = g(X,Y)$ 以及 (X,Y) 的联合分布，如何求出 Z 的分布？

(X, Y) 为二维离散型随机变量

例1. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为下表

$X \backslash Y$	0	1
0	3/10	3/10
1	3/10	1/10

试求: (1) $Z_1=X+Y$;

(2) $Z_2=XY$;

(3) $Z_3=\max\{X,Y\}$的分布律。

解：列下表

p_{ij}	3/10	3/10	3/10	1/10
(X,Y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
$X+Y$	0	1	1	2
XY	0	0	0	1
$\max\{X,Y\}$	0	1	1	1

于是，$Z_1=X+Y$ 的分布律为：

$X+Y$	0	1	2
p_k	3/10	3/5	1/10

$Z_2=XY$ 的分布律为：

XY	0	1
p_k	9/10	1/10

$Z_3=\max\{X,Y\}$ 的分布律为

$\max\{X,Y\}$	0	1
p_k	3/10	7/10

例2. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X \sim \pi(\lambda_1)$，$Y \sim \pi(\lambda_2)$，求证 $Z = X + Y \sim \pi(\lambda_1 + \lambda_2)$.

证: $Z=X+Y$ 可能的取值为 0, 1, 2, …, 且

$$\{X+Y=k\} = \bigcup_{i=0}^{k} \{X=i, Y=k-i\}$$

由概率的有限可加性及 X,Y 的独立性可得：

$$P\{Z=k\}=P\{X+Y=k\}=P\left\{\bigcup_{i=0}^{k}\{X=i,Y=k-i\}\right\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i,Y=k\text{-}i\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i\}P\{Y=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k\,(k=0,1,2,\cdots)$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}=\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$

二维连续型随机变量的函数的分布

➢ 设二维连续型随机变量的函数为 $Z=g(X,Y)$，显然Z是一维随机变量，其分布函数为：

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}$$

如果设 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则

$$F_Z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

➢ 利用 Z 的分布函数与 Z 概率密度之间的关系，可以最终求出 $Z=g(X, Y)$ 的概率密度。

下面讨论几种特殊情形：

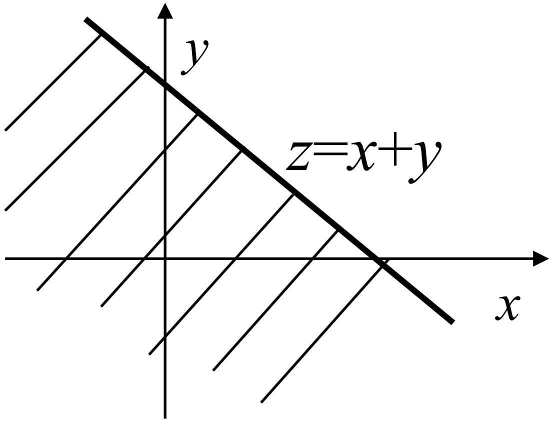
- 和 $(Z=X+Y)$ 的分布：

已知 (X, Y) 的联合密度是 $f(x, y)$, 求 $Z=X+Y$ 的分布密度，

先求$Z = X + Y$的分布函数。

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{X+Y \le z\} = P\{(X,\ Y) \in G\}\ ,$$

其中$G = \{(X,Y) \mid X+Y \le z\}$，如图



$$F_Z(z) = \iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

假设积分与求导可交换次序,

$$F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right]'\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

由此得到Z的密度函数 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$；类似地,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x.$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y,\quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x.$$

当 X与Y相 互独立时， $f(x,y)=f_X(x)\times f_Y(y)$ 有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y$$

称为卷积公式, 记为$f_X * f_Y$,即

$$f_X * f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y$$

结论: 若 X, Y 是连续型 r.v. 且 X 与 Y 相互独立, 则 $X+Y$ 也是连续型 r.v. 且它的密度函数为 X 与 Y 的密度函数的卷积.

例3. 设 X 和 Y 相互独立, 且都服从 $N(0, 1)$, 求: $Z=X+Y$ 的分布密度.

解：由X和Y都服从$N(0,1)$知

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\ f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},-\infty<x,y<+\infty,$$

由卷积公式有 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

令$t=x\text{-}z/2$，得 $f_Z(z)=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\left(t\mathrm{e}^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}(-2t^2\mathrm{e}^{-t^2})\mathrm{d}t\right)$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}2t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\overset{\text{令}u=t^2}{=}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_0^{+\infty}2u^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\qquad \text{即}Z\sim N(0,2).$$

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$$

伽玛函数的性质:

(i) $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$;

(ii) 对于正整数 n, $\Gamma(n+1)=n!$;

(iii) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

例4. 设 (X, Y) 有联合概率密度, 求 $Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

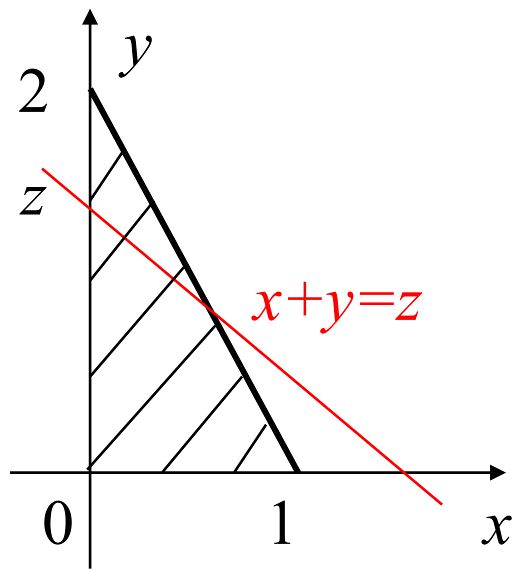
$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x<1,\quad 0<y<2(1-x)\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

解: (X, Y) 在如图区域中服从均匀分布，Z 密度计算公式为

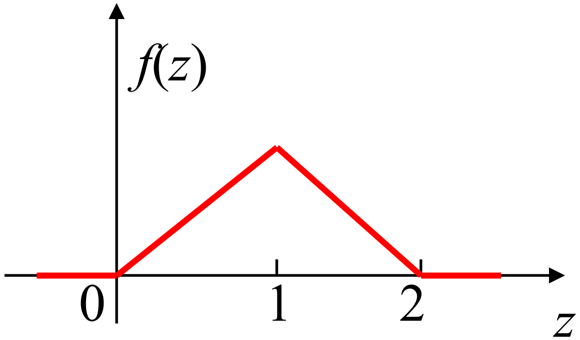
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z\text{-}x)\mathrm{d}x.$$

从图形上可以看出应把z 的取值分成如下四个区域讨论：

$z<0,\quad 0\le z<1,\quad 1\le z<2,\quad z\ge 2$



$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < z - x < 2(1-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < z \\ x < 2 - z \end{cases}$$



(1) 当$0 < z < 1$时，应有$0 < x < z$,于是 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x = \int_0^z 1\mathrm{d}x = z$

(2) 当$1 < z < 2$时，应有$0 < x < 2 - z$,于是 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x = \int_0^{2-z} 1\mathrm{d}x = 2 - z$

(3) $z < 0$或$z \geq 2$时，$f_Z(z) = 0$，所以

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 < z < 1 \\ 2 - z, & 1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

➢ 商 $(Z=X/Y)$ 的分布:

设 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$，求$Z=\dfrac{X}{Y}(Y\neq 0)$ 的分布密度。

仍用"分布函数法"，先求Z 的分布函数

$$F_Z(z)=P\left\{\frac{X}{Y}\le z\right\}$$

$$=P\{(X,Y)\in G\},\text{其中}G=\left\{(x,y)\middle|\frac{x}{y}\le z\right\},$$

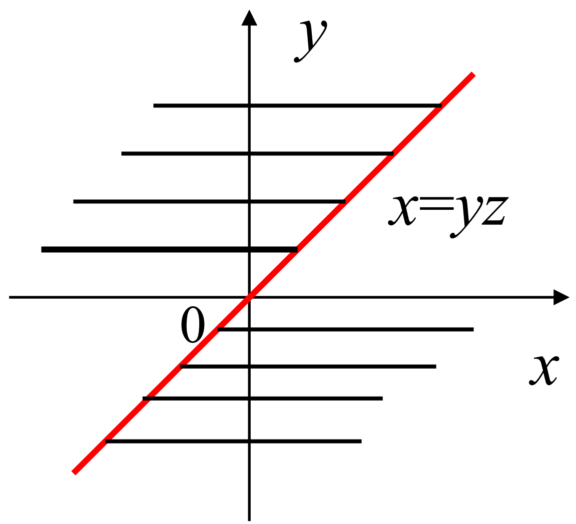
如图, 于是 $F_Z(z)=\iint\limits_{x/y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$F_Z'(z)=\int_0^{+\infty} f(zy,y)y\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0} f(zy,y)(-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(zy,y)|y|\mathrm{d}y$$

□ $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(zy,y)|y|\mathrm{d}y.$



特别地, 当 X,Y 相互独立时,

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(zy)f_Y(y)|y|\mathrm{d}y\,.$$

例5. 设 X,Y分别表示两只不同型号的灯泡的寿命，X,Y 相互独立，它们的概率密度依次为

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, x>0,\\ 0,\ \text{其他},\end{cases}\quad g(y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y},\ y>0,\\ 0,\ \text{其他},\end{cases}$$

试求$Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度函数.

解：由$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)\mathrm{d}y$有 $\quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(zy,y)|y|\mathrm{d}y$

当$z\le 0$时，$f_Z(z)=0$;

当$z>0$时，$f_Z(z)=\int_0^{\infty}y\mathrm{e}^{-yz}2\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}2y\mathrm{e}^{-y(z+2)}\mathrm{d}y=\dfrac{2}{(2+z)^2}$;

即 $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(2+z)^2}, z>0,\\ 0, \qquad z\le 0.\end{cases}$$

- M=max$\{X,Y\}$ 及 m=min $\{X, Y\}$ 的分布:
  - ✓ 设 X,Y 相互独立, 分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$; 首先求 M=max$\{X, Y\}$ 的分布.

对于任意的实数z, X,Y 中的大者小于等于z，必有X 和Y 都小于等于z ，反之, 若X, Y 都小于等于z, 则它们中的大者也小于等于z, 于是

$$\{\max\{X,Y\}\le z\}=\{X\le z,Y\le z\}$$

$$\text{从而}F_M(z)=P\{\max\{X,Y\}\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$$
$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}\quad(X,Y\text{相互独立})$$
$$=F_X(z)\cdot F_Y(z)$$

$$\text{即 }F_M(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z).$$

对$N=\min\{X,Y\}$的分布,注意到$\{\min\{X,Y\}>z\}=\{X>z,Y>z\}$

于是 $F_N(z)=P\{\min\{X,Y\}\le z\}$

$$=1-P\{\min\{X,Y\}>z\}$$

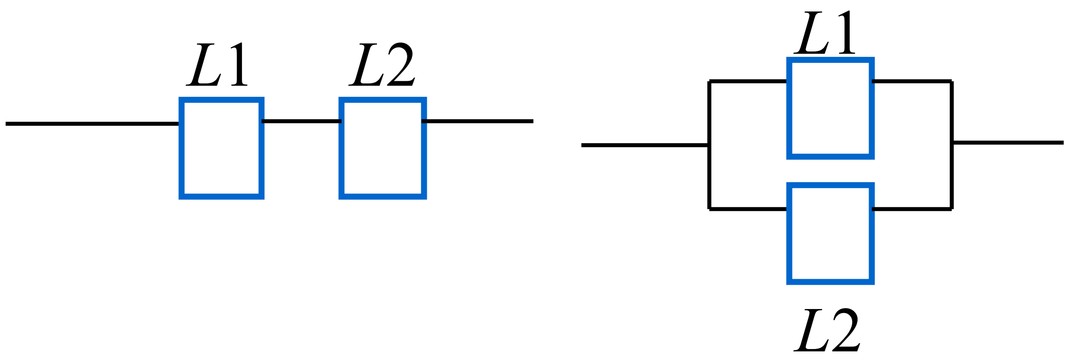
$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1\text{-}P\{X>\mathrm{z}\}\cdot P\{Y>\mathrm{z}\}\ (\text{相互独立})$$

$$=1\text{-}(1\text{-}P\{X\le z\})(1\text{-}P\{Y\le z\})$$

$$=1\text{-}(1\text{-}F_X(z))(1\text{-}F_Y(z)).$$

例6. 两个部件L_1, L_2组成的串、并联系统



L_1, L_2独立工作，其寿命$X \sim e(\lambda_1)$，$Y \sim e(\lambda_2)$，求系统可靠度。

$$\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}, t > 0$$

解: (1) L_1, L_2 有一个失效, 则系统失效, 即 $T=\min\{X, Y\}$

$$R(t)=P\{T>t\}=P\{\min\{X,Y\}>t\}=P\{X>t,Y>t\}$$

$$=P\{X>t\}P\{Y>t\}=\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}=\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

(2) L_1, L_2都失效，系统失效，即 $T=\max\{X,Y\}$

$$R(t)=P\{\max\{X,Y\}>t\}=1-P\{\max\{X,Y\}\le t\}$$

$$=1-P\{X\le t,Y\le t\}=1-P\{X\le t\}P\{Y\le t\}$$

$$=1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 t})(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t})$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}-\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

➢ 利用“分布函数法”导出两 r.v. 的和、商等的分布函数或密度函数的公式, 其要点为:

(1) 为求r.v.函数$g(X,Y)$的密度函数先求它的分布, 即$F_Z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}$

(2) 在求$P\{g(X,Y)\le z\}$的过程中, 用到下列等式:

$$P\{g(X,Y)\le z\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中$f(x,y)$为(X,Y)的联合密度函数.

(3) 利用密度函数与分布函数的关系求出$Z=g(X,Y)$的分布密度.

例7. 设X和Y相互独立, 且都服从$N(0, \sigma^2)$, 求$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的分布函数.

解：已知$f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$,$-\infty < x < +\infty$,

$f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$,$-\infty < y < +\infty$,

先求$F_Z(z) = P\left\{\sqrt{X^2 + Y^2} \le z\right\}$,

当$z \le 0$时，$F_Z(z)=0$,

当$z>0$时, $F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\} = \displaystyle\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

作极坐标变换$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(z \ge r \ge 0, 0 \le \theta < 2\pi$

$$F_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot 2\pi[-\sigma^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}]\Big|_0^z = 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

$\therefore F_Z'(z) = \dfrac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$ $\quad \therefore f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, z>0, \\ 0, \quad z \le 0. \end{cases}$(参数为$\sigma$的瑞利分布)

3.6 随机变量函数的联合分布

- 设 X_1, X_2 是联合连续的随机变量，具有联合密度函数 f_{X_1,X_2}，Y_1，Y_2 为的 X_1, X_2 函数，有时我们需要求出 Y_1, Y_2 的联合分布；

- 具体地说 设 $Y_1=g_1(X_1,X_2), Y_2=g_2(X_1,X_2)$ 函数 g_1 , g_2 满足下列两个条件:

1.由下列方程组

$$y_1 = g_1(x_1, x_2)$$
$$y_2 = g_2(x_1, x_2)$$

可唯一地解出 x_1, x_2 来，即求出 $x_1=h_1(y_1, y_2)$， $x_2=h_2(y_1, y_2)$.

2.函数 g_1, g_2 对一切(x_1, x_2)具有连续偏导数，并且下面的2×2行列式对一切(x_1, x_2)有

$$J(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}\equiv\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_2}{\partial x_2}-\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\neq 0$$

在上述两条件之下，可以证明 Y_1, Y_2 的联合密度函数为

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\left|J(x_1,x_2)\right|^{-1} \qquad (7.1)$$

其中 $x_1=h_1(y_1, y_2)$, $x_2=h_2(y_1, y_2)$.

- (7.1)的证明可从下式入手

$$P\{Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2\} = \iint\limits_{\substack{(x_1,x_2) \\ g_1(x_1,x_2)\le y_1 \\ g_2(x_1,x_2)\le y_2}} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \tag{7.2}$$

- Y_1,Y_2 联合密度函数可通过对上式关于 y_1, y_2 的偏微商得到. 微商的结果刚好等于 (7.1)式的右边. 微商的过程作为高等微积分的一个练习不再赘述.

例1 设X_1, X_2为联合连续的随机变量，其联合密度函数 f_{X_1,X_2}

令$Y_1 = X_1+X_2$, $Y_2 = X_1-X_2$. 求出Y_1,Y_2的联合密度函数.

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\left|J(x_1,x_2)\right|^{-1} \qquad (7.1)$$

解 – 设$g_1(x_1, x_2)= x_1+x_2$，$g_2(x_1, x_2)= x_1-x_2$, 经计算

$$J(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

– 由$y_1=x_1+x_2$, $y_2= x_1-x_2$解得$x_1= (y_1+ y_2)/2$, $x_2= (y_1- y_2)/2$.

– 利用(7.1)可得所求的密度函数是:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{2} f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right)$$

例如，如果X_1，X_2为独立同分布的（0,1）均匀随机变量，则

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0\le y_1+y_2\le 2,\ 0\le y_1-y_2\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

又或者，如果X_1，X_2为相互独立的指数随机变量，其相应的参数为λ_1，λ_2，那么

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{2}\exp\left\{-\lambda_1\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)-\lambda_2\left(\dfrac{y_1-y_2}{2}\right)\right\} & y_1+y_2\ge 0,\ y_1-y_2\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

设X_1，X_2为相互独立的标准正态随机变量，则

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-[(y_1+y_2)^2/8+(y_1-y_2)^2/8]}=\frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-(y_1{}^2+y_2{}^2)/4}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\mathrm{e}^{-y_1{}^2/4}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\mathrm{e}^{-y_2{}^2/4}$$

因此，不仅得知X_1+X_2与X_1-X_2服从$N(0,2)$，
而且，X_1+X_2与X_1-X_2还是相互独立的。

还可以得到如果随机变量X_1与X_2独立且同分布，其分布函数为F，
则X_1+X_2与X_1-X_2相互独立当且仅当F是正态分布函数。

3.7 N 维随机变量简介

➢ n 维联合分布

定义1. 设$(X_1, \ldots, X_n)$为 n 维随机变量，对任意 n 个实数 x_1, $x_2, \ldots, x_n$, 称 n 元函数 $F(x_1,\cdots,x_n) = P\{X_1 \le x_1,\cdots,X_n \le x_n\}$ 为 n 维随机变量 $(X_1, \ldots, X_n)$ 的联合分布函数。

定义2. 如果 $(X_1, \ldots, X_n)$ 只取有限或可列无穷多个向量值，则称 $(X_1, \ldots, X_n)$ 为 n 维离散型随机变量 $P\{X_1 = a_{i1}, \cdots, X_n = a_{in}\} = p_i \quad (i = 1, 2, \cdots)$

称为 $(X_1, \ldots, X_n)$ 的联合分布律。

定义3. 如果存在非负函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$, 使得$(X_1, \ldots, X_n)$的分布函数

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

对一切实数 $x_1, \ldots, x_n$ 成立, 则称$(X_1, \ldots, X_n)$为 n 维连续型变量, 称 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 为 $(X_1, \ldots, X_n)$ 的联合概率密度。

概率密度性质：

$$(1)\, f(x_1,\cdots,x_n)\geq 0$$

$$(2)\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=1$$

对 n 维连续型变量 $(X_1, \ldots, X_n)$，落在 n 维空间某区域 G 内的概率为 $P\{(X_1,\cdots,X_n)\in G\}=\int\cdots\int_G f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$

➢ k 维边缘分布

定义4. 称 $(X_1, \ldots, X_n)$ 中任意 k 个分量所构成的 k 维随机变量的分布为 $(X_1, \ldots, X_n)$ 的 k 维边缘分布.

例如，称 (X_1, X_2, X_3) 的分布函数

$$F_{X_1X_2X_3}(x_1,x_2,x_3)=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,X_3\le x_3\}$$

$$=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,X_3\le x_3,X_4<+\infty,\cdots X_n<+\infty\}$$

$$=F\{x_1,x_2,x_3,+\infty,\cdots,+\infty\}$$

为 $(X_1, \ldots, X_n)$ 关于 (X_1, X_2, X_3) 的三维边缘分布函数.

$$F_{X_i}(x_i)=P\{X_i\le x_i\}=F(+\infty,\cdots,+\infty,x_i,+\infty,\cdots,+\infty)$$

为 $(X_1, \ldots, X_n)$ 关于 X_i 的一维边缘分布函数.

若 $(X_1,\ldots,X_n)$ 为 n 维连续型随机变量，其概率密度为$f(x_1,..,x_n)$, 则

$$f_{X_1\cdots X_k}(x_1,\cdots,x_k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_{k+1}\cdots\mathrm{d}x_n$$

称为 $(X_1,\ldots,X_n)$ 关于 $(X_1,\ldots,X_k)$ 的 k 维边缘概率密度.

关于 X_i 的一维边缘概率密度为

$$f_{X_i}(x_i)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots\mathrm{d}x_n$$

➢ 独立性

定义5. 设 $(X_1, \ldots, X_n)$ 的分布函数为 $F(x_1, \ldots, x_n)$, 一维边缘分布函数为 $F_{Xi}(x_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, 若对所有实数 $x_1, \ldots, x_n$, 有

$F(x_1,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$ 则称 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立。

定理：设 $(X_1, \ldots, X_n)$ 为 n 维离散型随机变量，则 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立的充要条件为：

$$P\{X_1 = a_{i1}, \cdots, X_n = a_{in}\} = P\{X_1 = a_{i1}\} \cdots P\{X_n = a_{in}\}$$

定理：设 $(X_1, \ldots, X_n)$ 为 n 维连续型随机变量，则 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立的充要条件为：

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

➢ n 维随机变量的函数的分布

设 $Y=g(X_1, \ldots, X_n)$ 是 n 维随机变量 $(X_1, \ldots, X_n)$的函数，则 Y 的分布函数为:

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X_1,\cdots,X_n) \le y\}$$

如果 $(X_1, \ldots, X_n)$ 是连续型的, 密度为 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 则

$$F_Y(y) = P\{g(X_1,\cdots,X_n) \le y\}$$

$$= \int \cdots \int_{g(x_1,\cdots x_n)\le y} f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

下面是几个重要结论：

1）正态变量之和分布

设$X_k \sim N(\mu_k,\ \sigma_k^2)\ (k=1,2,\cdots n)$且$X_1, X_2,\cdots, X_n$相互独立, 则它们的和

$$X_1 + \ \cdots + X_n \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots \sigma_n^2)\ .$$

进一步，有限个相互独立的正态r.v.的线性组合仍服从正态分布.

2）标准正态变量平方和的分布

设 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，且均服从 $N(0,1)$, 则 $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$所服从的分布称为自由度为n的χ^2分布，它的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases} 0, y \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(\dfrac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, y>0 \end{cases}$$

3) 最大值与最小值的分布

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立, 分布函数分别为 $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$, 则 $M=\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的分布函数为 $F_M(z)=F_1(z)\cdot F_2(z)\ldots F_n(z)$

$N=\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$的分布函数为 $F_N(z)=1-(1-F_1(z))\cdot(1-F_2(z))\ldots(1-F_n(z))$

特别地, 当$X_1,\ X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. 时, 设分布函数为 $F(x)$, 则 $F_M(z)=(F(z))^n,\ F_N(z)=1-(1-F(z))^n$.