第二章 随机变量及其分布

- 2.1 随机变量的概念
- 2.2 离散型随机变量及其分布律
- 2.3 随机变量的分布函数
- 2.4 连续型随机变量的概率密度
- 2.5 随机变量的函数分布

回顾：第一章

- 定义：统计规律性、随机试验、样本空间、随机事件；
- 性质与运算律：事件运算分配率、摩根律；频率；
- 概率：3条公理，6个性质；
- 古典概型（离散的等可能概型）、几何概型；
- 条件概率、增加额外条件的条件概率；
- 独立性；

用样本点的集合表示随机事件，事件五花八门，需要定义大量的集合来表示事件；能否给出更简洁的表达方法呢？

2.1 随机变量的概念

- 例 1. 从一批产品中任意抽取 k 件，X_1表示观察出现的"废品数"，依试验结果不同，X_1 的所有可能取值为 $0, 1, 2, \ldots, k$ 等 $k+1$个结果，可用$\{X_1 = 0, 1, 2, \ldots, k\}$表示试验结果；
- 例 2. 记录某接待站一天中来访的人数 X_2，依试验结果不同，X_2 的所有可能取值为: $0, 1, 2, \ldots$. "接待 k 个人"可用$\{X_2 = k\}$表示；

- 例3. 测试灯泡寿命的试验中, 随不同的试验, “灯泡寿命” X_3 可以取所有非负的实数值, “灯泡寿命为 t 小时” 可以用 $\{X_3=t\}$ 来表示.
- 例4. 掷一枚硬币观察正反面. 试验结果为: e_1={正面}, e_2={反面}. 试验的结果可以用变量 X_4 表示.

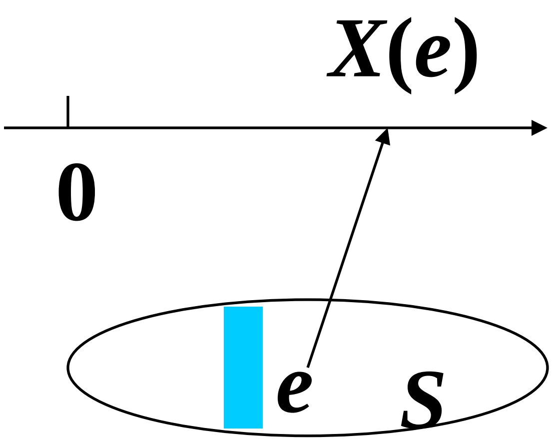
$$X_4 = X_4(e) = \begin{cases} 1, \text{当} e = e_1 \\ 0, \text{当} e = e_2 \end{cases}$$

- 对于试验 E 引进**变量** $X(e)$，
  - ✓ 它定义在 S 上，依试验结果 e 不同，取不同实值；
  - ✓ 反过来，$X(e)$ 取不同实值也与不同试验结果对应.

- 由于试验结果 e 发生是**随机**的，故称 $X(e)$ 为**随机变量**.

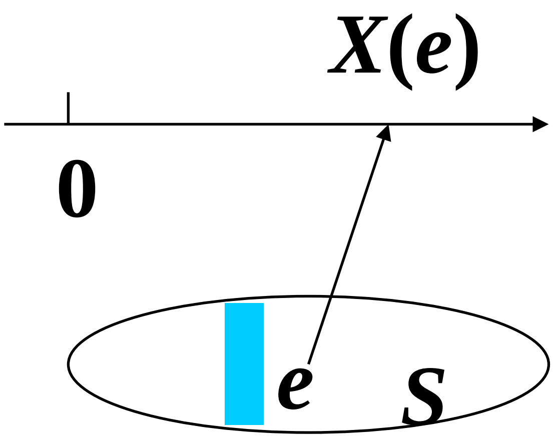
- **定义2.1** 如果对于样本空间中每个样本点 e，都有唯一的一个实数 $X(e)$ 与之对应，则称 $X(e)$ 为**随机变量**. 简记 $X(e)$为 X.

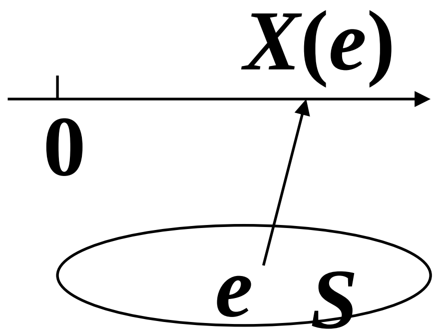
  - “废品数大于10”可用$\{X_1>10\}$表示;
  - “来访人数为5” 用$\{X_2=5\}$表示.
  - “灯泡寿命在3000到5000小时之间用 $\{3000<X_3<5000\}$表示;
  - “硬币出现正面” 用 $\{X_4=1\}$表示.



- 若 L 是一个实数集合，将 X 在 L上取值写成 $\{X \in L\}$;
  - 引入随机变量$X(e)$，事件$B=\{e \mid X(e) \in L\}$，即B 是由S 中使得$X(e) \in L$ 的所有样本点e 所组成的事件；

  此时有 $P(B)=P\{e \mid X(e) \in L\}=P\{X \in L\}$.





- **随机变量：** 就是建立了“随机事件”到“实数轴上Borel σ-代数”的一种对应，并且保证建立的这种对应的随机事件都是可以定义概率测度的。

- **目的：**
  - 用随机变量表示试验发生的结果以及事件，比较方便，并且可以进行各种数学运算；
  - 通过随机变量来研究随机试验，全面揭示随机现象的统计规律.

- 随机变量的分类：
  - 离散型随机变量;
  - 连续型随机变量；
  - 其他.

2.2 离散型随机变量及其分布律

- **定义：** 若随机变量全部可能取到的值是有限多个或可列无限多个，则称为离散型随机变量。

离散型 random variable (r.v.)的分布律:

设离散型 r.v.X 所有可能取值为$x_k\,(k=1,2,3,\ldots)$

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\ldots \qquad (1)$$

则称式(1)为离散型r.v.X的分布律或 概率分布.

2.2 离散型随机变量及其分布律

设离散型 r.v.X 所有可能取值为$x_k\,(k=1,2,3,\dots)$

$$P\{X=x_k\}=p_k\,,\quad k=1,2,\dots \qquad (1)$$

式(1)也可用表格形式表示:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

分布律的性质：

$$(1)\ p_k \geq 0,\ k = 1,2,\dots$$

$$(2)\ \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

例1. 设一汽车在开往目的地的道路上需经过四盏信号灯，每盏信号灯以概率 p 禁止汽车通过， 以 X 表示汽车首次停下时已通过信号灯的盏数， 求 X 的分布律. (设各信号灯的工作是相互独立的).

解:

X	0	1	2	3	4
p_k	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$(1-p)^4$

即 $P\{X=k\}=(1-p)^k p,\quad k=0, 1, 2, 3.$

$$P\{X=4\}=(1-p)^4$$

例2. 袋中装有 3 只白球和 2 只红球，从袋中任取两球，用 X 表示取到的白球数，则 X 是一取值为0, 1, 2的离散型随机变量，其分布律为

解：$P\{X=0\}=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$, $\quad P\{X=1\}=\dfrac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{3}{5}$

$$P\{X=2\}=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$$

或

X	0	1	2
p_k	1/10	3/5	3/10

例3 设X的分布律为$P\{X=k\}=\frac{1}{3^n}\cdot C_n^k\cdot a^k\ (k=0,1,2,\cdots,n)$,试确定常数$a$.

解：由分布律的性质可得

$$1=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^n}C_n^k a^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{a}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}=\left(\frac{a}{3}+\frac{1}{3}\right)^n$$

故 $a=2.$

几种重要的离散型 r.v. 的分布律

（一） 0-1分布

设随机变量 X 只可能取 0 和 1 两个数值，其分布为

$P\{X=1\}=p$， $P\{X=0\}=1-p$；

或表为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

其中$0<p<1$, 则称 X 服从 (0-1) 分布或两点分布。

设 A 是随机事件，$P(A)=p\ \ (0<p<1)$，记：$X=\begin{cases}1 & A\text{发生}\\ 0 & \overline{A}\text{发生}\end{cases}$，

则 X 服从 (0-1)分布.

- 一般地，若某随机试验 E 只有两个可能的结果，这种随机试验就可用 0-1 分布来描述.
  - 如：产品是否合格，射击是否命中，婴儿的性别等；

(二) 二项分布

定义： 设试验E只有两个可能结果A 与$\overline{A}$, 且$P(A)=p \quad (0<p<1)$, 将试验E 独立重复地进行n 次, 这样的试验称为n 重伯努利(Bernoulli)试验.

- 若以 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，则 X 为取值 0, 1, …, n 的离散随机变量，且分布律为：

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,\cdots,n)$$

称 r.v. X 服从参数为 n, p 的二项分布， 记为: $X \sim b(n,p)$.

(当 $n=1$ 时, $b(1,p)$就是$(0-1)$分布)

- n 重伯努利试验中事件 A 出现次数 X 的分布律，以 A_i 表示第 i 次试验中 A 发生，以 $\overline{A_i}$ 表示第 i 次试验中A不发生，令 $B_k=$有k次A发生

上式右边共有C_n^k个，且两两互斥. 由试验独立性

$$P(A_1\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n)=P(A_1)\cdots P(A_k)P(\overline{A}_{k+1})\cdots P(\overline{A}_n)=p^kq^{n-k}$$

再由概率可加性得：

$$P(B_k)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

例4. 某种电子元件的使用寿命超过1500小时为一级品，已知一大批该产品的一级品率为 0.2，从中随机抽查 20 只，求这20只元件中一级品只数 X 的分布律.

解: 检查一只元件看是否为一级品可以看作是 一次试验，抽查20只元件可以看作20次试验；

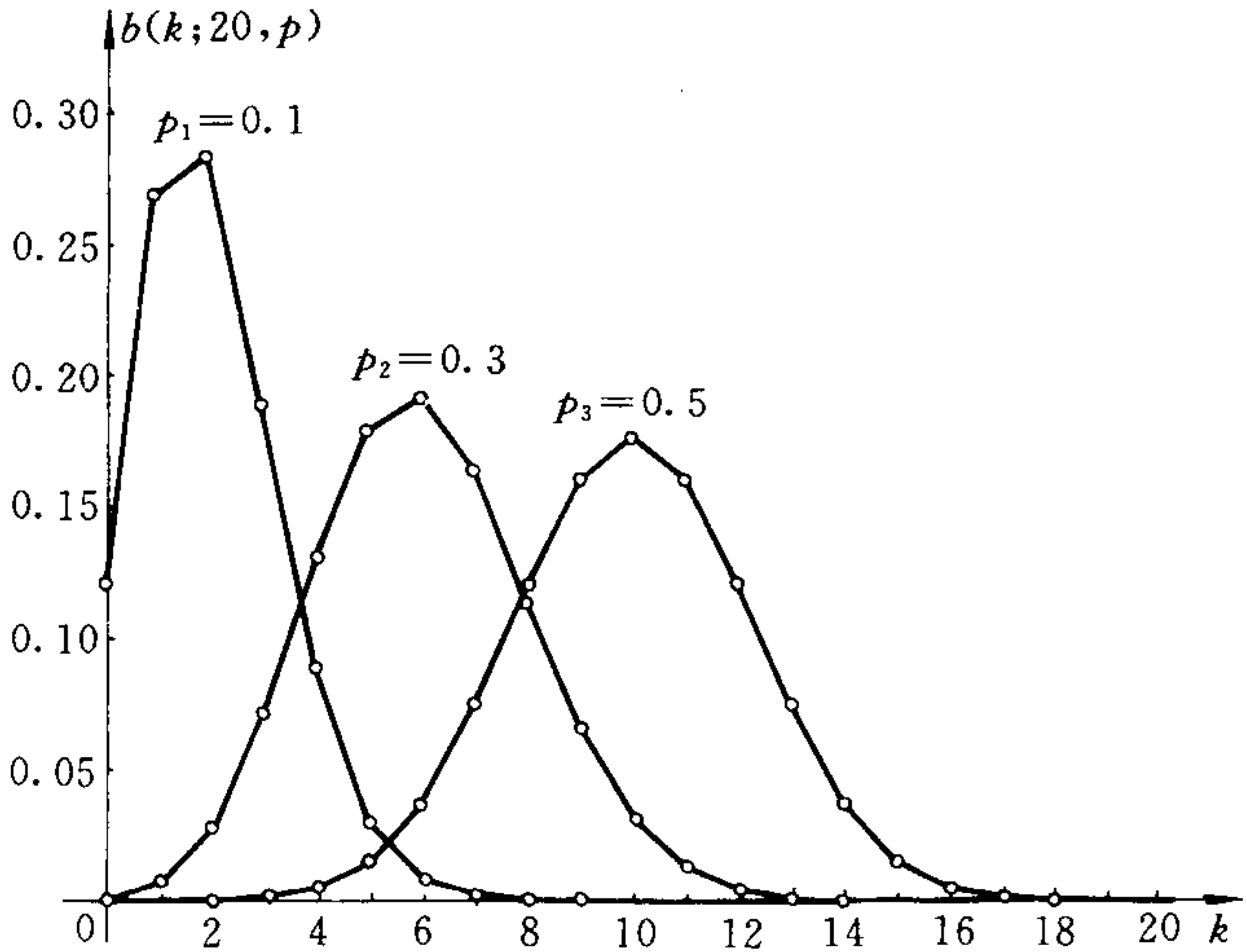
又因这批元件总数很大，不放回抽样可以近似看作放回抽样处理，所以这是20重伯努利试验，则 $X \sim b(20, 0.2)$.

$$P\{X = k\} = C_{20}^{k}(0.2)^{k}(0.8)^{20-k},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 20.$$

k	0	1	2	3	4
p	0.0115	0.0576	0.1369	0.2054	0.2182
k	5	6	7	….	20
p	0.1745	0.1091	0.0546	….	1.048E-14

- 从上表可以看出，当 k 从 0 到 20 变化时，对应的概率值先变大，后变小；
- 其实，这个概率规律是所有二项分布共有的性质，这就需要求出具有最大概率的项；

二项分布图


$b(k;20,p)$
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
$p_1=0.1$
$p_2=0.3$
$p_3=0.5$
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
k

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=\frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-(k-1)}}=\frac{(n-k+1)p}{kq}=1+\frac{(n+1)p-k}{kq}$$

- 于是：当$k<(n+1)p$时，$P\{X=k\}>P\{X=k-1\}$

  当$k=(n+1)p$时，$P\{X=k\}=P\{X=k-1\}$

  当$k>(n+1)p$时，$P\{X=k\}<P\{X=k-1\}$

- 所以有:

  (1) 当 $(n+1)p$ 为整时，$P\{X=k\}$在 $k=(n+1)p$ 和 $k=(n+1)p-1$处同时达到最大。

  (2) $(n+1)p$ 非整时，$P\{X=k\}$在 $k=[(n+1)p]$ 处达到最大值。

$$P\{X=k\} = C_{20}^{k}(0.2)^{k}(0.8)^{20-k},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 20.$$

如上例中，$(n+1)p = (20+1)\times 0.2 = 4.2$, 所以 $P\{X=k\}$ 有最大值$P\{X=4\}=0.2182$，即最有可能抽到4个一级品.

使得 $P\{X=k\}$ 达到最大值的数 k 称为**最可能成功的次数**。

例5. 某人进行射击, 每次命中率为0.02, 独立射击400次, 试求至少击中两次的概率.

解: 设400次射击中击中的次数为X, 则$X \sim b(400, 0.02)$.

$$P\{X = k\} = C_{400}^{k}(0.02)^{k}(0.98)^{400-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 400.$$

则 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

$$= 1 - (0.98)^{400} - 400 \times (0.02) \times (0.98)^{399}.$$

- 当 n 较大, p又较小时, 二项分布的计算比较困难, 例如 0.98^{400}, 0.02^{400}, …, 可以用后面的 Poisson 分布近似计算.

(三) 泊松分布(Poisson)

若离散随机变量 X 的分布为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \quad ,$$

其中$\lambda>0$是常数, 则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布,

记为$X\sim\pi(\lambda)$.

可以验证: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=1$

$$e^{\lambda}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{A_n^k}{n^k}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

例如，一定时间间隔内电话交换台收到的呼唤次数; 一本书的印刷错误数；某一地区一个时间间隔内发生的交通事故数等都服从泊松分布.

二项分布可用泊松分布来近似, 有如下定理:

泊松 (Poisson) 定理: 设随机变量序列$\{X_n\}$, $X_n \sim b(n, p_n)$,

且 $np_n = \lambda > 0$为常数, k 为任一固定的非负整数，则

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = k\} = \lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!},$$

证明: 由 $np_n=\lambda,\ p_n=\lambda/n.$ 于是

$$P\{X=k\}=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\to\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}.(n\to\infty)$$

泊松定理的意义：

1. 在定理的条件下，二项分布的极限分布是 泊松分布.

2. 当 n 很大且 p 又较小时，这就是二项分布的概率近似计算公式 .

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \text{其中} \lambda = np,$$

例6. 某人进行射击, 每次命中率为0.02, 独立射击400次, 试求至少击中两次的概率.

解： 设400次射击中击中的次数为X, 则$X \sim b(400, 0.02)$.

$$P\{X = k\} = C_{400}^{k}(0.02)^{k}(0.98)^{400-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 400.$$

则 $P\{X \geq 2\} \quad = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

在例3中, $X \sim b(400, 0.02)$, $\lambda = np = 400 \times 0.02 = 8$,

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$$

$$= 1 - (0.98)^{400} - 400 \times (0.02) \times (0.98)^{399}$$

$$\approx 1 - \mathrm{e}^{-8} - 8\mathrm{e}^{-8} \approx 0.997.$$

例7. 设有同类型设备300台, 各台工作是相互独立的, 发生故障的概率都是0.01, 设一台设备的故障由一个人处理, 问：至少需配备多少工人，才能保证当设备发生故障但不能及时维修的概率小于 0.01?

解: 设需配备 N 个工人，记同一时刻发生故障的设备台数为 X；

"设备发生故障不能及时维修"的数学表达式为:

"$X>N$"，即求最小的N, 使得 $P\{X>N\}<0.01$.

其中 n=300, p=0.01, $\lambda=np$=3, 由泊松近似公式

$$P\{X > N\} = \sum_{k=N+1}^{300} C_{300}^{k}(0.01)^{k}(0.99)^{300-k}$$

$$\approx \sum_{k=N+1}^{300} \frac{3^{k}e^{-3}}{k!} < 0.01.$$

查*Poisson* 分布表可知, 当 $N \geq 8$ 时, 有$P\{X \leq N\} \geq 0.99$

故最小的$N = 8$

(四) 几何分布

进行重复独立试验, 设每次试验成功的概率为p, 失败的概率为 $1-p=q$ $(0<p<1)$, 将试验进行到出现一次成功为止, 以 X 表示所需的试验次数, 则X 的分布律为: $P\{X=k\}=q^{k-1}p$, $k=1, 2, \ldots$

称为 X 服从参数为 p 的几何分布.

例. 设某种社会定期发行的奖券, 每券 1 元, 中奖率为 $p=0.0001$, 某人每次购买1张奖券, 如果没有中奖下次继续买, 直到中奖止, 求购买次数 X 的分布律.

解: $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$, $k=1, 2, 3, \ldots$

$$P\{X>1000\}=p\sum_{k=1001}^{\infty}q^{k-1}=q^{1000}=0.9047$$

- 对某批 N 件产品进行有放回抽样调查，若产品中有 M 件次品，现从整批产品中随机抽取 n ($n<=N-M$) 件产品，则在这 n 件产品中出现的次品数 X 是一个所有可能取的值为0 , 1, 2, …, l（其中 $l=\min\{M, n\}$）的离散型随机变量，其分布律为：

$$P(X=k)=C_n^k\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

有放回的抽样结果服从二项分布，如果是无放回抽样，会怎么样呢？

(五) 超几何分布

对某批 N 件产品进行无放回抽样调查，若产品中有 M 件次品，现从整批产品中随机抽取 n ($n<=N-M$) 件产品，则在这 n 件产品中出现的次品数 X 是一个所有可能取的值为0 , 1, 2, …, l（其中 $l=\min\{M, n\}$) 的离散型随机变量，其分布律为：

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(k=0,1,2,\cdots,l)$$

这个分布称为 超几何分布；

（六）负二项分布

若随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=C_{k-1}^{r-1}p^{r}(1-p)^{k-r}\quad k=r,r+1,\cdots$

其中，$0<p<1$，则称 X 服从负二项分布.

- 若令 X 表示贝努里试验序列中事件 A 第 r 次出现时所需要的试验次数，则 X 服从负二项分布.
  - 如第 r 次击中目标时所射击的次数是 k；
  - 投掷硬币试验中第 r 次掷出正面时投掷的次数是k；

回 顾

- 常见的离散型随机变量：
  - 泊松分布；
  - 几何分布、超几何分布、负二项分布；
- 随机变量的分布函数：定义与性质；
- 连续型随机变量的概率密度函数；
- 常用的连续型随机变量的分布：
  - 均匀分布$U(a, b)$；
  - 指数分布$e(\pi)$；
  - 正态分布$N(\mu, \sigma^2)$ ；

二项分布与超几何分布？

- 例. 费希尔（Fisher）精确检验 一位科学家打算研究对于一种特定疾病，什么性别的人患病概率更大，或者对于男性和女性而言是等可能的？
  - 随机抽取 n 名女性和 m 名男性，并对每个人进行测试（假设这个检验是完全准确的）；
  - 假设患这种疾病的女性和男性的数量分别是 X 和 Y，且$X\sim B(n,p_1)$和$Y\sim B(m,p_2)$互相独立，其中p_1和p_2是未知的；观测发现 $X+Y=r$；
  - 现在想知道 p_1是否等于 p_2?

二项分布与超几何分布？

➢ 接下来，计算$P(X = x|X + Y = r)$，由贝叶斯准则可得：

$$P(X = x|X + Y = r) = \frac{P(X + Y = r|X = x)P(X = x)}{P(X + Y = r)}$$
$$= \frac{P(Y = r - x)P(X = x)}{P(X + Y = r)}$$

- 其中，$P(X + Y = r|X = x) = P(Y = r - x)$，这一步是由 X 和 Y 相互独立得到的；

二项分布与超几何分布？

- 在原假设成立的情况下 $p = p_1 = p_2$，则有$X \sim B(n,p)$，$Y \sim B(m,p)$且互相独立，故 $X+Y \sim B(n+m,p)$；
- 所以：

$$P(X=x|X+Y=r)$$

$$=\frac{C_m^{r-x}p^{r-x}(1-p)^{m-r+x}C_n^x p^x(1-p)^{n-x}}{C_{m+n}^r p^r(1-p)^{n+m-r}}=\frac{C_n^x C_m^{r-x}}{C_{m+n}^r}$$

- 因此，X 的条件分布是参数为 n、m、r的超几何分布；

二项分布与超几何分布？

- 随机抽取 n 名女性和 m 名男性，患病的女性和男性的数量分别是 X 和 Y，$X \sim B(n, p_1)$，$Y \sim B(m, p_2)$；给定$X+Y=r$ 时，X 的条件分布是参数为 n、m、r 的超几何分布；
- 当 m=200，n=200，r=5，x=1时的概率：

$$\frac{\binom{200}{1}\binom{200}{4}}{\binom{400}{5}} = 0.1555$$

- 当 m=200，n=200，r=5，x=0 时的概率为0.03，是小概率事件，认为男性和女性患病概率不等；

回 顾

- 额外条件：
  - 全概率公式、条件概率、贝叶斯公式
- 独立性：两个事件、三个事件、多个事件
- 随机变量的定义与分类：
- 离散型随机变量的分布律：
  - 0-1分布、二项分布 $b(n, p)$、泊松分布 $\pi(\lambda)$、几何分布、超几何分布、负二项分布
  - 二项分布的逼近：泊松定理

3.3 随机变量的分布函数

- 对于非离散型 r. v. 已不能用分布律来描述它， 需要考虑 r.v. 的值落入一个区间的概率， 如 $P\{x_1<X\leq x_2\}$, $P\{X\leq x\}$等，为此引入随机变量的分布函数.

1. 定义：设 r.v. X, $x\in R^1$, 则 $F(x)=P\{X\leq x\}$称为 X 的分布函数.

(1) $P\{x_1<X\leq x_2\}=P\{X\leq x_2\}-P\{X\leq x_1\}$

$= F(x_2) - F(x_1)$.

(2) 无论是离散型 r.v. 还是非离散型 r.v.， 分布函数都可以描述其统计规律性.

2. 性质:

(1) $F(x)$是单调不减函数. (单调性)

$$\forall x_2 > x_1,\ F(x_2)-F(x_1)=P\{x_1<X\le x_2\} \ge 0.$$

(2) $0\le F(x) \le 1$ 且 (规范性)

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0, \quad F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

2. 性质:

(3) $F(x)$至多有可列个间断点，而在其间断点上也是右连续的，$F(x+0)=F(x)$，即在间断点 x_0 处，有

$$\lim_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0+0) = F(x_0) \quad (\text{右连续性})$$

说明：性质 (1), (2), (3) 是鉴别一个函数 $F(x)$ 是否为某随机变量 X 的分布函数的充要条件.

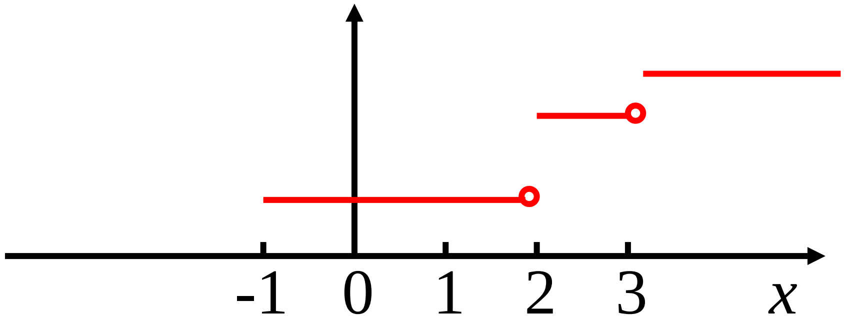
例1. 离散型 r.v., 已知分布律求其分布函数.

X	-1	2	3
p_k	1/4	1/2	1/4

求：X 的分布函数, 并求$P\{X \le 1/2\}$, $P\{3/2 < X \le 5/2\}$.

$$F(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1/4, & -1 \le x < 2 \\ 1/4 + 1/2 = 3/4, & 2 \le x < 3 \\ 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & x<-1\\ 1/4, & -1\le x<2\\ 1/4+1/2=3/4, & 2\le x<3\\ 1/4+1/2+1/4=1, & x\ge 3\end{cases}$$



$P\{X\le 1/2\}=F(1/2)=1/4$ 或由分布律直接得：

$P\{X\le 1/2\}=P\{X=-1\}=1/4,$

$P\{3/2<X\le 5/2\}=F(5/2)-F(3/2)=1/2.$

若离散型随机变量 X 的分布律为：$P\{X=x_k\}=p_k \quad (k=1,2,\cdots)$

则 X 的分布函数为 $F(x)=P\{X\le x\}=P\{\bigcup\limits_{x_k\le x}\{X=x_k\}\}=\sum\limits_{x_k\le x}P\{X=x_k\}$

即 $$F(x)=\sum_{x_k\le x}p_k$$

- 离散型 r.v. X 的分布函数 $F(x)$ 的图形呈阶梯状(如上例)，$x_1=-1$，$x_2=2$，$x_3=3$ 都是第一类间断点（跳跃式的）;
- $F(x)$的图形在这些点处都有一个跃度，在 x_k 处的跃度就是 X 取值 x_k 的概率 p_k.

3.4 连续型随机变量的概率密度

1. 定义: 对于$r.v.X$ 的分布函数$F(x)$，存在非负函数$f(x)$，使对于任意的实数 x，有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

则称 X 为连续型 r.v.，其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度.

- 连续型 r.v. 的分布函数是连续函数，这种 r.v. 的取值是充满某个区间的.

2. 概率密度$f(x)$的性质: (1) $f(x)\geq 0$. (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

(3) $P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x,$

$(x_1 \le x_2)$

(4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则有$F'(x) = f(x)$

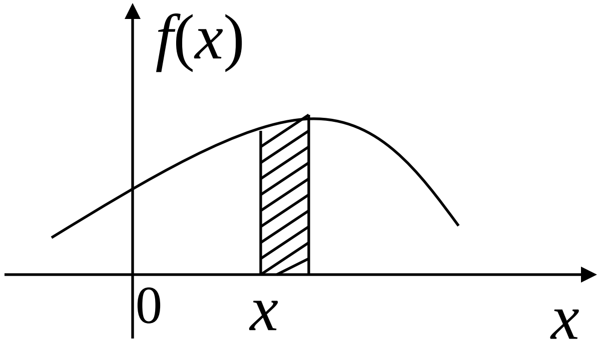
$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x\}}{\Delta x},$$

上式可知当 Δx 很小时，有

$$P\{x < X \le x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x.$$

当 $\Delta x \to 0$，？



3. 关于连续型 r.v. 的一个重要结论

定理: 设 X 为连续型 r.v., 它取任一指定的实数值 a 的概率均为0. 即 $P\{X=a\}=0$.

证明：设X 的分布函数为$F(x)$，$\Delta x>0$

得 $0\le P\{X=a\}\le P\{a-\Delta x<X\le a\}=F(a)-F(a-\Delta x)$

令 $\Delta x\to 0$, 由$F(x)$ 的连续性可得$P\{X=a\}=0.$

所以
$$\begin{aligned}P\{x_1<X<x_2\}&=P\{x_1\le X\le x_2\}\\&=P\{x_1\le X<x_2\}=P\{x_1<X\le x_2\}\\&=F(x_2)-F(x_1)\end{aligned}$$

例1. 设随机变量X 具有概率密度 $f(x)$， 试确定常数k，并求分布函数$F(x)$ 和 $P\{X > 0.1\}$.

$$f(x)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-3x}, & x>0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

例1. 设随机变量X 具有概率密度 $f(x)$，试确定常数k，并求分布函数$F(x)$ 和 $P\{X>0.1\}$.

$$f(x)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-3x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$$

解：由 $1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty} k\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x=k/3$ 得 $k=3.$

当$x>0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{x} 3\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-3x}$

$=1\text{-}F(0.1)=\mathrm{e}^{-0.3}$

于是分布函数 $F(x)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-3x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

$$P\{X>0.1\}=\int_{0.1}^{+\infty} 3\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-0.3}=0.7408$$

例2. 连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，

$$F(x)=\begin{cases} A+B\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, x>0 \\ 0, x\le 0 \end{cases},$$

求：(1) A, B；(2) 概率密度函数；(3) 落入 $(1,2)$ 的概率；

解：(1) 因为 $F(+\infty)=1$，故有 $\lim\limits_{x\to\infty}(A+B\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})=1$，因此 $A=1$.

又因 $\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=0=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=A+B$，

所以有 $B=-A=-1$ 于是 $F(x)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, x>0 \\ 0, x\le 0 \end{cases}$

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

(2) 对 $F(x)$ 求导，得 x 的概率密度为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

(3) X 落入 $(1, 2)$ 内的概率为

$$P\{1<X<2\}=\int_1^2 x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x(=F(2)-F(1))$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-2}=0.4721.$$

4. 几个常用的连续型 r.v. 分布

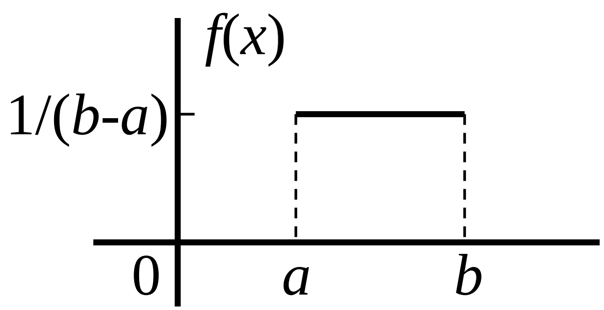
常见的连续型分布有 均匀分布，指数分布，正态分布，伽玛分布等.

(一) 均匀分布:

设随机变量X在区间$[a,b]$上取值，且概率密度为:

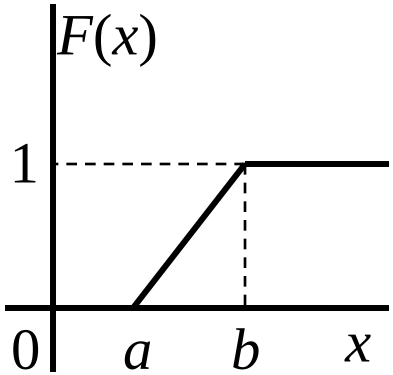
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

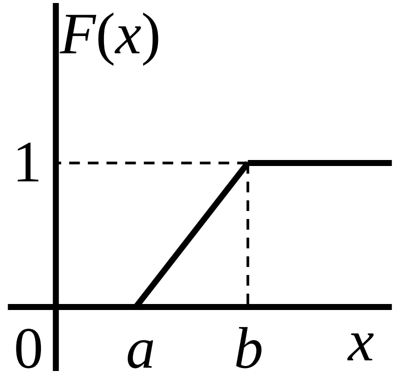
则称随机变量 X 在 (a, b) 上服从均匀分布, 记作 $X\sim U(a, b)$.



其分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ (x-a)/(b-a), & a\le x<b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$





若$X \sim U(a,b)$，且$(c,c+d) \subset (a,b)$，则

$$P\{c < X \leq c+d\} = \int_c^{c+d} \frac{1}{b-a} \mathrm{d}x = \frac{d}{b-a},$$

- 此概率与子区间长度成正比，而与子区间的起点无关，这也是均匀分布的由来.

- **均匀分布的普遍性：**（1）设 U 是(0, 1)上的均匀分布， F 是一个连续并严格递增的累积分布函数，X=$F^{-1}(U)$，则 X 是一个累积分布函数为 F 的随机变量；

- 对于任意 x，有：

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$$

$F(x)$在 X 取值区间内的严格递增性保证了其反函数存在；

- 因此，X 是一个累积分布函数为 F 的随机变量；

- **均匀分布的普遍性：（2）**设 X 是一个累积分布函数为 $F(x)$（连续且严格递增）的随机变量，那么$F(X) \sim U(0,1)$；

  - 令$Y = F(X)$，因为$F(x)$为累积分布函数，Y 在（0，1）上取值，所以：当 $y \leq 0$时，$P(Y \leq y) = 0$；当$y \geq 1$时，$P(Y \leq y) = 1$；
  - 对于$y \in (0,1)$，有：

$$P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) = P\left(X \leq F^{-1}(y)\right) = F\left(F^{-1}(y)\right) = y$$

  - 因此，Y 服从$Unif(0,1)$；

(二) 指数分布:

1. 定义: 如果连续型随机变量 X 的概率密度为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, x>0,\\ 0, \qquad\quad x\le 0,\end{cases}, \theta>0.$$

则称X 服从参数为θ 的指数分布，记为$X\sim e(\theta)$

有些书上称 $\lambda=1/\theta$ 时上述的概率分布是参数为λ 的指数分布。

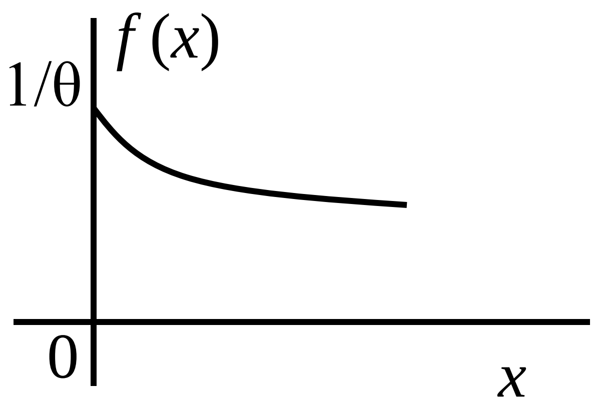
(二) 指数分布:

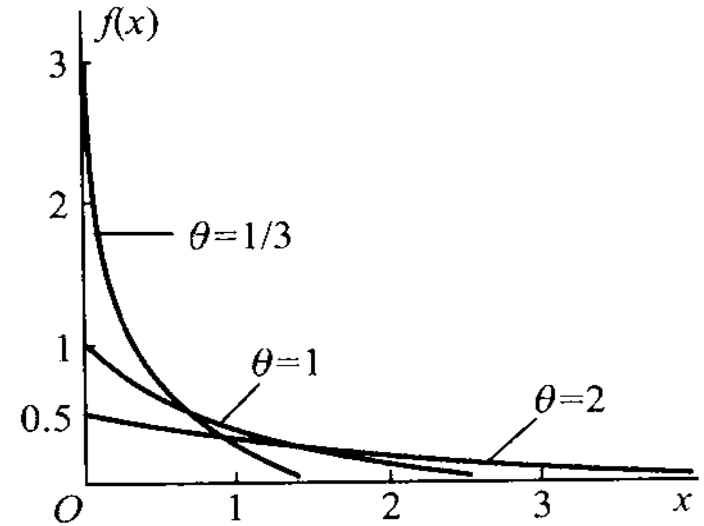
X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x/\theta}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$

- 指数分布常用来做各种寿命分布的近似分布，如电子元件，动物寿命等，通话时间，随机服务时间也近似服从指数分布.

指数分布的概率密度：

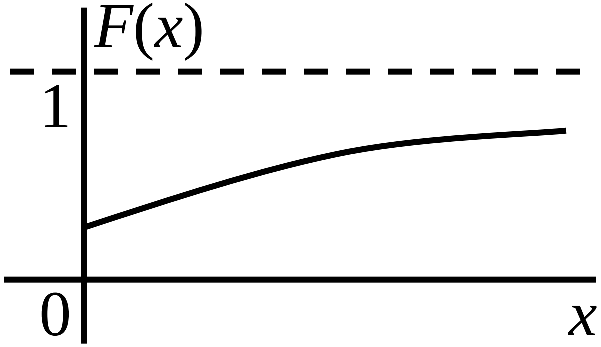
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$





指数分布的分布函数:

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x/\theta}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$$



➢ 指数分布的无记忆性:

定理：若 $X\sim e(\theta)$, 则对任意的正数 s,t 有

$$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}$$

证：
$$P\{X>s+t\mid X>s\}=\frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}=\frac{1-F(s+t)}{1-F(s)}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-(s+t)/\theta}}{\mathrm{e}^{-s/\theta}}=\mathrm{e}^{-t/\theta}=P\{X>t\}$$

> ➢ 无记忆性表明寿命 X 大于 s 时，再活 t 年的概率与年龄 s 无关，即寿命“无老化”,“永远年轻”.

➢ 指数分布的无记忆性:

定理：若 $X \sim e(\theta)$, 则对任意的正数 s, t 有

$$P\{X > s+t \mid X > s\} = P\{X > t\}$$

$$P\{X > s+t\} = P\{X > s+t \mid X > s\}\, \mathrm{P}\{X > s\}$$

$$= P\{X > t\}\, \mathrm{P}\{X > s\}$$

➢ **定理：** 若 X 是具有无记忆性的正连续型随机变量，则 X 服从指数分布。

证明：设 F 是 X 的累积分布函数，令$G(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$，其中 G 被称为生存函数；

即需要证明：对某一λ，$G(x) = e^{-\lambda x}$；

由无记忆性的定义，对任意 s，t >0，有

$$G(s + t) = G(s)G(t)$$

上式两端同时对 s 求导（因为 X 是连续型随机变量，所以G是可微的），对所有的s，t>0，有：

$$G'(s + t) = G'(s)G(t)$$

- **定理：** 若 X 是具有无记忆性的正连续型随机变量，则 X 服从指数分布。

证明（续）：$G'(s+t) = G'(s)G(t)$

特别地，当s=0时，有：

$$G'(t) = G'(0)G(t)$$

令$G'(0) = c$，它只是个常数，再令 $y = G(t)$。此时就得到一个可分离的微分方程，即：

$$\frac{dy}{dt} = cy$$

➢ **定理：** 若 X 是具有无记忆性的正连续型随机变量，则 X 服从指数分布。

证明（续）：$\dfrac{dy}{dt} = cy$

该微分方程的通解为：$y = G(t) = Ke^{ct}$；

在初始解$G(0) = P(X > 0) = 1$的条件下，有特解 $G(t) = e^{ct}$；

而因为G是一个递减函数（这是由于F是一个递增函数），所以λ是正的，$c = G'(0) < 0$。

若令$\lambda = -c$，这正是我们想要的$G(t)$的形式；

因此，X服从指数分布；

例 （Blissville和Blotchville）Fred居住在Bliss Ville，这里的公共汽车总是准时到达，每隔10min就来一趟公共汽车。某一天，Fred弄丢了自己的手表，他在这天的某个随机时间点到达公共汽车站（假设公共汽车每天24h都在运行，Fred到达的时间独立于公共汽车的到达过程）。

（a）Fred等待下一班车所需的时间服从什么分布？Fred的平均等待时间是多少？

解：所需时间服从（0，10）上的均匀分布，因此平均等待时间为5min。

（b）若已知公共汽车在6min后仍未到达，那么Fred至少要再等3min以上的概率是多少？

解：设 T 为等待时间，则：

$$P(T \geq 6+3|T>6)=\frac{P(T\geq 9, T>6)}{P(T>6)}$$

$$=\frac{P(T\geq 9)}{P(T>6)}=\frac{1/10}{4/10}=\frac{1}{4}$$

特别地，在已经等待了6min的条件下，他必须再等待3min的概率只有1/4；

而他到达公交车站后，至少需要再等待3min的概率为 $P(T\geq 3)=7/10$；

Fred 在 Blissville的等待时间不是无记忆的；

（c）Fred搬到Blotchville，这座城市的规划不是很好，公共汽车到达时间更不稳定。现在，设当任何一辆公共汽车到达时，直到下一辆公共汽车到达所需的时间是一个指数随机变量，且其均值为10min。若Fred在随机的时间点到达公共汽车站，且不知道上一班公共汽车走了多久，那么Fred等待下一班公共汽车到达所需的时间服从什么分布？Fred的平均等待时间是多少？

解：由无记忆性可知，无论Fred是何时到达车站的，其等待时间均服从参数为1/10的指数分布（均值为10min）；

Fred的平均等待时间是10min；

（用 t 表示Fred到达车站时上一辆公共汽车离开的时间长度，用 Y 表示等待时间，X 表示下一辆车到达时间，$P\{Y>y\}=P\{X>y+t \mid X>t\}=P\{X>y\}$）

（d）当Fred向朋友抱怨Blotchville的交通状况糟糕时，朋友说：“别再抱怨了，你在上一班公共汽车到达和下一班公共汽车到达之间的一个均匀的时刻到达公共汽车站。公共汽车到达时间之间间隔的平均长度为10min，但由于你在该间隔内的任何时间点都有可能到达车站，所以平均等待时间只有5min。”

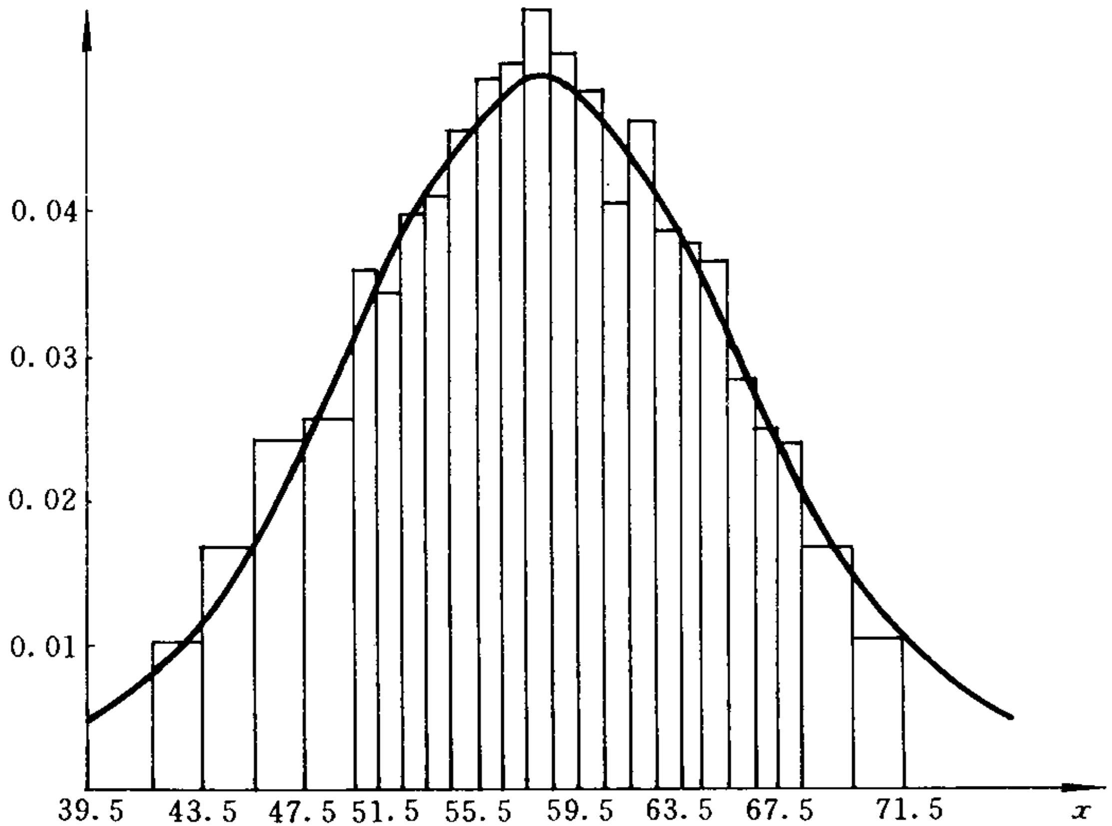
解：两辆公共汽车一个时间间隔的平均长度是10min，但Fred不可能在这些时间间隔的任何时刻到达车站：与在公共汽车之间的短间隔期间到达车站相比，他更可能在公共汽车之间的长间隔期间到达；

例如，如果公共汽车之间的一个时间间隔是50min，另一个时间间隔是5min，那么Fred更有可能在50min长的时间间隔期间内到达车站。（这种现象被称为长度偏置）

回顾

- 概率分布函数及其性质；
- 概率密度函数的定义、性质、现实意义；
- 典型的连续型随机变量：
  - ✓ 均匀分布：普遍性
  - ✓ 指数分布：无记忆性

- 某工厂对其生产的 A 型号零件的重量进行抽样，测量了3805个样品的重量，计算不同重量出现的频率，并画出直方图；（均值56.94，标准差8.2 的正态分布符合得相当好）



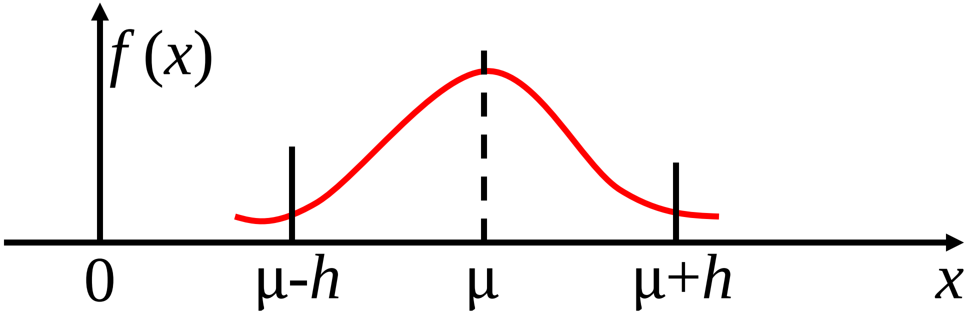
(三) 正态分布:

设随机变量X的概率密度为：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty,$$

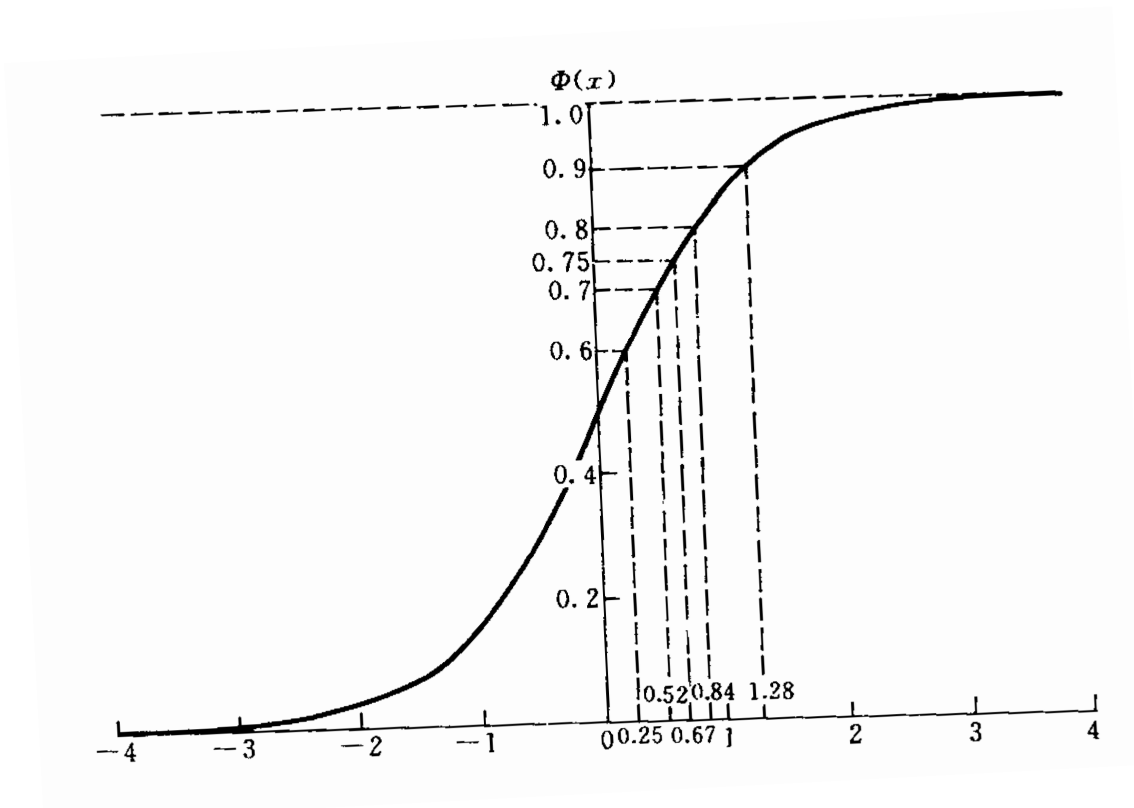
其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$为常数, 则称 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布或高斯($Gauss$)分布, 记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

其图像为：



正态分布函数为：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t.$$



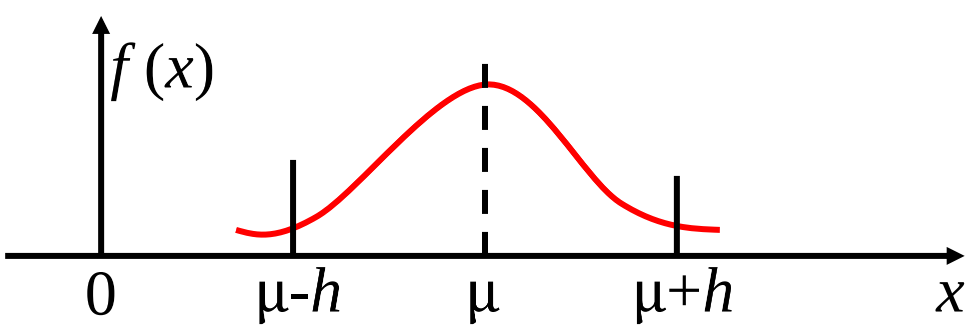
正态分布密度函数:

性质: (1) 曲线关于 $x=\mu$ 对称, 这表明对 $\forall h>0$ 有

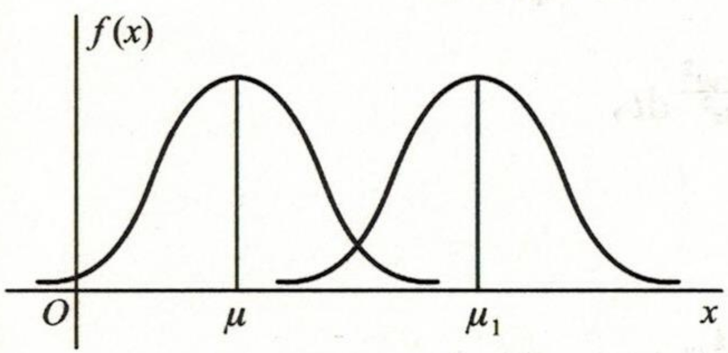
$$P\{\mu-h<X\le\mu\}=P\{\mu<X\le\mu+h\}.$$

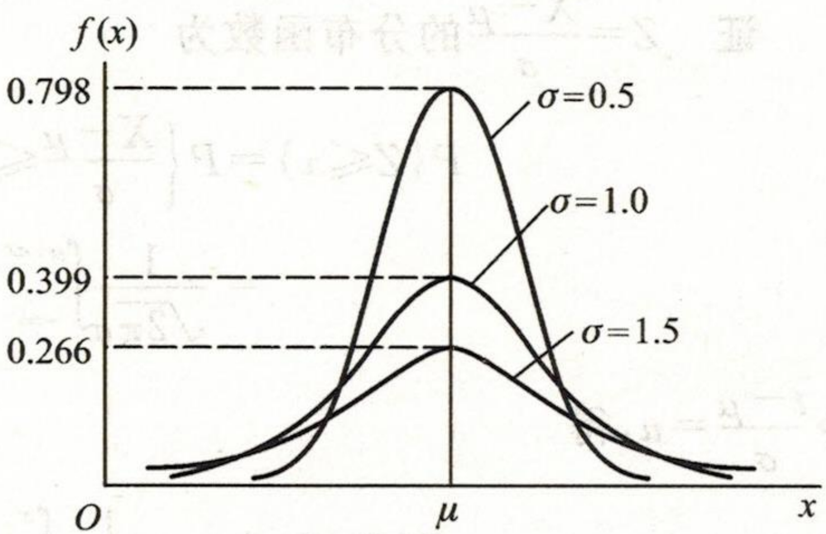
(2) 当 $x=\mu$ 时取最大值 $f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, 表明 X 取值在 $x=\mu$ 附近较集中.

(3) $f(x)$ 以 x 轴为渐近线.



(4) $f(x)$ 的图形依赖于两个参数 μ, σ. 若固定 σ, 改变 μ,则 $f(x)$ 的图形沿 x 轴平移而形状不变. 可见 $f(x)$ 的位置由 μ 确定, 称 μ 为位置参数. 固定 μ 改变 σ, 则最大值 $f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 改变, σ 越小, $f(x)$ 越陡峭, 相反则越平坦, 故称 σ 为 $f(x)$ 的尺度参数





➢ 实际问题中大量随机变量服从正态分布, 如

- 人的身高，体重；
- 农作物的收获量；
- 炮弹的落点 等；

(2) 标准正态分布:

当$\mu=0,\sigma=1$时, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$,

则称X服从标准正态分布，记为$X\sim N(0,1)$.

$\Phi(x)$即标准正态分布函数，其表已列出供查用.

(3) 对于一般正态分布，分布函数怎么求？方法是建立与标准正态分布的转换关系；

命题：若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,\ 1)$.

证明：$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$的分布函数为：

$$P\{Z \le x\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le x\}=P\{X \le \mu+\sigma x\}$$

$$=F(\mu+\sigma x)=\int_{-\infty}^{\mu+\sigma x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$$

命题： 若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,\ 1)$.

证明： $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$的分布函数为：

$$P\{Z\le x\}=F(\mu+\sigma x)=\int_{-\infty}^{\mu+\sigma x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

$$\overset{令u=\frac{t-\mu}{\sigma}}{=}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(x)$$

可知 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

命题：若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,\ 1)$.

对于任意区间$(x_1,x_2]$，有

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\left\{\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \boxed{\frac{X-\mu}{\sigma}} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

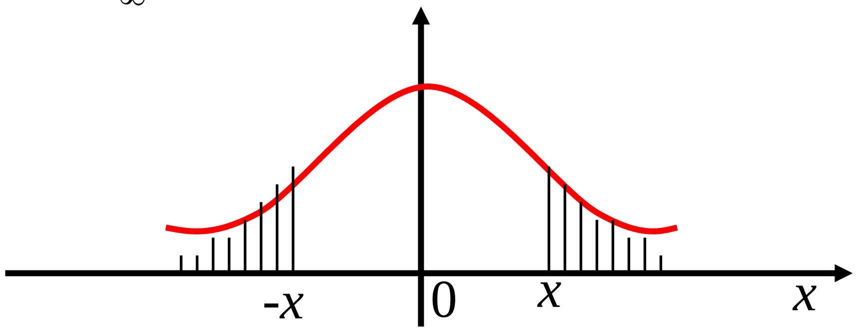
➢ 引理：对于标准正态分布有 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

证明: 考虑 $x>0$ 的情形，由于标准正态密度 $\varphi(x)$ 是偶函数， 作积分变换 u=-t, 有

$$\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}(-1)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$$

$$=1-\Phi(x).$$



例1: 设$X \sim N(1,4)$，则 $P\{0 < X \le 1.6\} = ?$

$$P\{0 < X \le 1.6\} = \Phi\left(\frac{1.6-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-1}{2}\right)$$

$$= \Phi(0.3) - \Phi(-0.5)$$

$$= 0.6179 - [1 - \Phi(0.5)]$$

$$= 0.6179 - 1 + 0.6915$$

$$= 0.3094.$$

例2. 公共汽车车门的高度是按男子与车门碰头机会在 0.01 以下设计的，设男子身高 $X \sim N(170, 6^2)$ (厘米），问车门高度应为多少？

解：设车门高度为 h, 按题意有

$$P\{X>h\}<0.01$$

$$P\{X > h\} = 1 - F(h) = 1 - \Phi\left(\frac{h-170}{6}\right) < 0.01$$

即 $\Phi\left(\frac{h-170}{6}\right) > 0.99$，查表可得

$$\frac{h-170}{6} \geq 2.33 \Rightarrow h \approx 184(\text{厘米})$$

例3. 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 求 X 落入区间: $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$, $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$, $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ 的概率为多少?

解: $P\{\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma\} = F(\mu+\sigma)-F(\mu-\sigma)$

$$=\Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

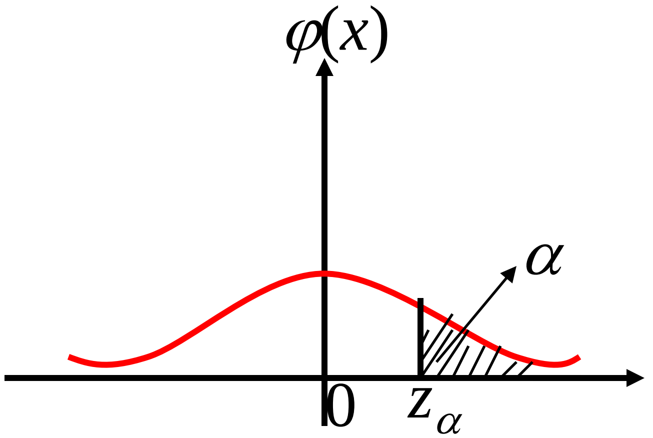
$$=\Phi(1)-\Phi(-1)\approx 0.6826$$

$$P\{\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=0.9544$$

$$P\{\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma\}=\Phi(3)-\Phi(-3)=0.997$$

➢ 由上三式可知, 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的 r.v. X 之值基本上落入$[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$之内, 几乎全部落入 $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ 内.

(4) 标准正态分布的上 α 分位点:



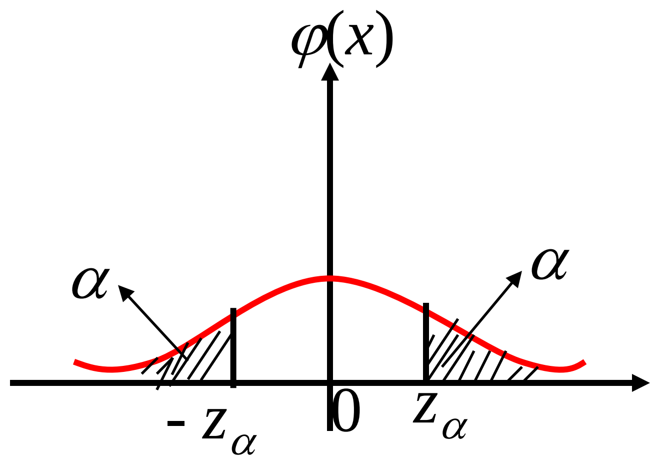
设$X \sim N(0,1)$，若z_α满足条件

$$P\{X > z_\alpha\} = \alpha,\quad 0 < \alpha < 1,$$

则称点z_α为标准正态分布的上α 分位点；

由查标准正态分布函数表可知 $z_{0.05} = 1.645$，$z_{0.025} = 1.96$

(4) 标准正态分布的上 α 分位点:



由对称性可得: $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$

$$z_{0.95} = -z_{0.05} = -1.645, z_{0.975} = -z_{0.025} = -1.96$$

例4 某校抽样调查结果表明，考生的概率论与数理统计成绩 近似地服从正态分布，平均成绩 72分，96分以上的占考生总数的 2.3%，求考生的概率统计成绩在 60 分至 84 分之间的概率。

解: $X \sim N(72, \sigma^2)$

$$P(X > 96) = 1 - P(X \le 96) = 1 - \Phi\left(\frac{96-72}{\sigma}\right) = 2.3\%$$

$\Phi\left(\dfrac{24}{\sigma}\right) = 0.977$，查表得 $\dfrac{24}{\sigma} = 2$，$\sigma = 12$

所求概率为:

$$P(60 \le X \le 84) = \Phi\left(\frac{84-72}{12}\right) - \Phi\left(\frac{60-72}{12}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$= 2\Phi(1) - 1 = 0.682$$

例5. VAR(Vale at Risk) 是财务核算中的一个核心概念，投资的VAR可以定义为一个值v，满足投资的损失大于 v 的概率只有1%。如果投资收益 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，如何根据 v 值选择投资项目？

解：因为损失是收益的相反数，所以：$P(-X>v)=0.01$

因为收益 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，有：$-X\sim N(-\mu,\sigma^2)$, 继而：

$$P(-X>v)=P\left(\frac{-X+\mu}{\sigma}>\frac{v+\mu}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{v+\mu}{\sigma}\right)=0.01$$

查表，$\Phi(2.33)=0.99$，于是有 $\frac{v+\mu}{\sigma}=2.33$；

$$0.01 = P\left\{\frac{-X+\mu}{\sigma} > \frac{\nu+\mu}{\sigma}\right\} = 1-\Phi\left(\frac{\nu+\mu}{\sigma}\right)$$

– 根据正态分布表，$\Phi(2.33)=0.99$，于是我们有

$$\frac{\nu+\mu}{\sigma} = 2.33$$

- $\nu = VAR = 2.33\sigma - \mu$

- 结论是，在所有收益服从正态分布的投资集合中，使 μ-2.33σ 达到最大值的投资风险最小.

(四) 伽玛分布:

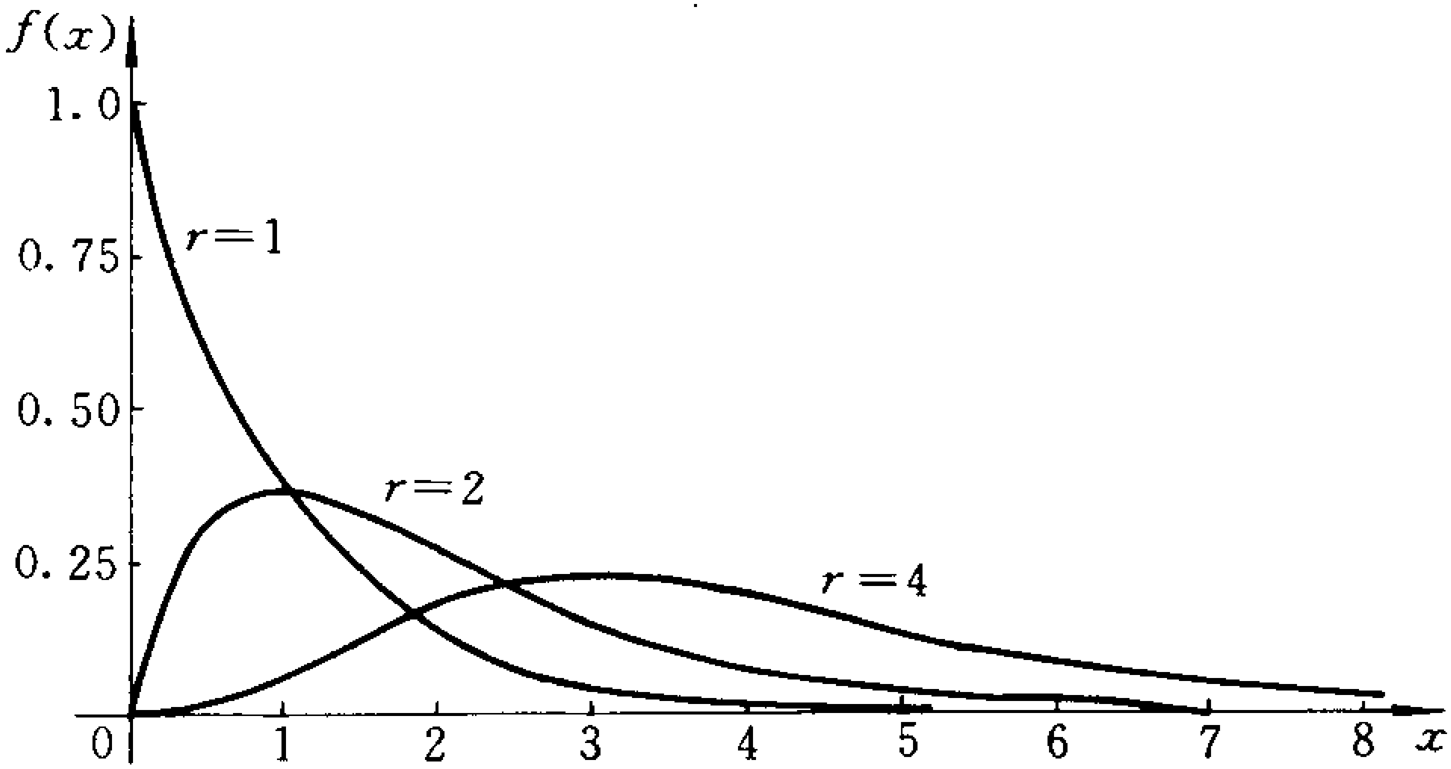
1. 定义: 如果连续型随机变量 X 的概率密度为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{p}}{\Gamma(p)}x^{p-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, x>0,\\ 0, \qquad x\le 0.\end{cases}$$

其中$\lambda>0$，$p>0$为参数，伽玛函数为$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

则称 X 服从伽玛分布, 简记 $X\sim\Gamma(p,\lambda)$

伽玛分布密度函数：



2. 特例: $\Gamma(1,\lambda)$ 是参数为 $1/\lambda$ 的指数分布.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases} \Longrightarrow f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\ \theta>0.$$

3. 伽玛函数的性质:

(i) $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$;

(ii) 对于正整数 n, $\Gamma(n+1)=n!$;

(iii) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}y^{p-1}\mathrm{d}y=?$$

– 对 $\Gamma(p)$ 分部积分可得：

$$\Gamma(p)=-\mathrm{e}^{-y}y^{p-1}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}(p-1)y^{p-2}\mathrm{d}y$$

$$=(p-1)\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}y^{p-2}\mathrm{d}y$$

$$=(p-1)\Gamma(p-1)$$

$$\boxed{\text{当}y=\infty,-\mathrm{e}^{-y}y^{p-1}=0;\quad \text{当}y=0,-\mathrm{e}^{-y}y^{p-1}=0;}$$

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1),\quad \Gamma(p)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}y^{p-1}\mathrm{d}y=?$$

- 对应于p的积分值, 比如说 $p=n$，有：

$$\begin{aligned}\Gamma(n)&=(n-1)\Gamma(n-1)\\&=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)\\&=\cdots\\&=(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times\Gamma(1)\end{aligned}$$

- 又因为 $\Gamma(1)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$， 可得 n 的积分值为：

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{p}}{\Gamma(p)}x^{p-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, x>0,\\ 0, \qquad x\le 0.\end{cases}$$

- 当p为一正整数，比方说 $p=n$ 时，参数为(p, λ)时的Γ分布，在实践中经常作为某个事件共发生n次的等待时间的分布；

- 某个事件在时间t内发生的次数服从参数为λt的泊松分布，证明：等待该事件共发生n次的时间是服从参数为(n,λ)的 Γ 分布的随机变量.

证明： 令 T_n 表示事件第 n 次发生的时间，求 $P\{T_n \le t\}$；

T_n小于等于t的充要条件：时刻t以前事件至少发生了n次

即时间区间$[0,t]$内发生的事件数 $N(t) \ge n$

因此：$P\{T_n \le t\} = P\{N(t) \ge n\}$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} P\{N(t) = j\} = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$$

最后一个等式成立是因为在$[0,t]$内发生的事件数服从参数为 λt 的泊松分布；

$$P\{T_n \le t\} = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$$

对上式求导得到T_n的密度函数如下：

$$f(t) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} j(\lambda t)^{j-1}\lambda}{j!} - \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} - \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} \qquad \Gamma(n) = (n-1)!$$

因此, T_n服从参数为(n, λ)的 Γ 分布；

Γ 分布与χ^2分布

- $\lambda = 1/2,\ p = n/2$ 的 Γ 分布(n为正整数)称为自由度为n的 χ^2 (读作“卡方”) 分布；

χ^2分布的**构造**：设 $X_1, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} N(0,1)$， 则统计量$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.称为自由度为$n$的$\chi^2-$分布，记为$\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

- 实际中，卡方分布常出现在误差分布中；例如，在 n 维空间中试图击中某一靶子，其中各坐标的偏差相互独立且为标准正态分布，则偏差的平方和服从自由度为 n 的 χ^2 分布；

Gumbel分布

- Gumbel分布的密度函数表示为：

$$f(\varepsilon_j) = \beta \exp\left(-\exp\left(-\beta(\varepsilon_j - \mu)\right) - \beta(\varepsilon_j - \mu)\right)$$

  - ✓ 参数为μ为位置参数，$1/\beta$为形状参数；
  - ✓ 当 μ=0 时，密度函数：$f(\varepsilon_j) = \beta \exp\left(-\exp(-\beta\varepsilon_j) - \beta\varepsilon_j\right)$
  - ✓ 当 μ=0 时，分布函数？？

$$F(\varepsilon_j) = \exp\left(-\exp(-\beta\varepsilon_j)\right)$$

3.5 随机变量的函数的分布

- 一炮弹从原点开始发射，命中点 $R=(v^2/g)\sin 2\alpha$，其中α表示仰角且服从 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上的均匀分布，v 表示炮弹速度，g 表示重力加速度；求 R 的分布？
- 中国父母的平均身高 $X \sim N(172, 6.5^2)$，子女平均身高Y是X的函数，$Y=a+bX$，求 Y 的分布？

3.5 随机变量的函数的分布

- 研究如何由已知的 r.v. X 的分布，求得它的函数$Y = g(X)$的分布 (其中 $g(.)$ 是已知的连续函数)，分两种情形讨论：

(一) X 为离散型 r.v.

例1：设 X 具有以下的分布律，求 $Y=(X-1)^2$ 分布律:

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4
Y	4	1	0	1

即 $P\{Y=0\}=P\{X=1\}=0.1$

$P\{Y=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.3+0.4=0.7$

$P\{Y=4\}=P\{X=-1\}=0.2$

即

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2

1. 离散 r.v. 函数的概率分布的求法:

设 X 的概率分布如下表:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
$P\{X=x_i\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

(1) 记 $y_i = g(x_i)$ ($i = 1, 2, \ldots$), y_i 的值也是互不相同的， 则 Y 的概率分布如下表:

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_k	$\cdots$
$P\{Y=y_i\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

(2) 若$g(x_1), g(x_2), \ldots$中不是互不相等的，则应将那些相等的值分别合并，并根据概率加法公式把相应的 p_i 相加，就得到了 Y 的概率分布律.

回顾

- 连续型随机变量及概率密度函数：
  - ✓ 正态分布：上α分位点，$\Phi(-x)$；
  - ✓ 伽玛分布：与指数分布、泊松分布和卡方分布的关系，伽马函数的表达式、性质；
- 随机变量的函数的分布：
  - ✓ 分布函数法；
  - ✓ 公式法；

回顾

- 典型的连续型随机变量：
  - ✓ 正态分布：密度函数、分布函数、标准化转换、上分位点
  - ✓ 伽玛分布：伽玛函数；伽马分布与、泊松分布的关系；
- 随机变量的函数的分布：
  - ✓ 离散型随机变量；
  - ✓ 连续型随机变量：未完待续

(二) X 为连续型 r.v.

例2. 设 r.v. X 具有概率密度 $f_X(x)$，求 $Y=2X+8$ 的概率密度.

$$f_X(x)=\begin{cases} x/8, & 0<x<4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

解： 先求 $Y=2X+8$ 的分布函数 $F_Y(y)$:

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}$$

$$=P\{X\le \frac{y-8}{2}\}=\int_{-\infty}^{(y-8)/2} f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$\left(=\frac{(y-8)^2}{64}, 8<y<16\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{(y-8)/2} f_X(x)\mathrm{d}x \quad \left(= \frac{(y-8)^2}{64}, 8 < y < 16 \right)$$

$$\therefore f_Y(y) = F_Y'(y)$$

$$= f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\left(\frac{y-8}{2}\right)' = \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

"分布函数法"：

(1) 先求出 Y 的分布函数: $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} = P\{X \in G\}$, 其中 $G=\{x: g(x) \le y\}$, 转化为关于 X 的事件, 再利用 X 的分布函数表示.

(2) 对 y 求导得到 Y 的概率密度: $f_Y(y) = F_Y'(y)$.

例2. 设 r.v. X 具有概率密度 $f_X(x)$，求 $Y=2X+8$ 的概率密度.

$$f_X(x)=\begin{cases} x/8, & 0<x<4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

解：先求 $Y=2X+8$ 的分布函数 $F_Y(y)$：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}$$

$$=P\{X\le \frac{y-8}{2}\}=\int_{-\infty}^{(y-8)/2} f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$\left(=\frac{(y-8)^2}{64}, 8<y<16\right)$$

设随机变量X具有概率密度$f_X(x), -\infty < x < \infty$，又设函数$g(x)$处处可导且恒有$g'(x) > 0$(或恒有$g'(x) < 0$),则$Y = g(X)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中$\alpha = \min\{g(-\infty), g(\infty)\}, \beta = \max\{g(-\infty), g(\infty)\}, h(y)$是$g(x)$的反函数。

例4. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$, 求 $Y = aX+b\ (a>0)$ 的概率密度。

解：由$X\sim N(\mu,\sigma^2)$知$f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

现在$y=g(x)=ax+b$,由这一式子解得 $x=h(y)=\dfrac{y-b}{a}$,且有$h'(y)=\dfrac{1}{a}$

由定理可得$Y=aX+b$ 的概率密度为

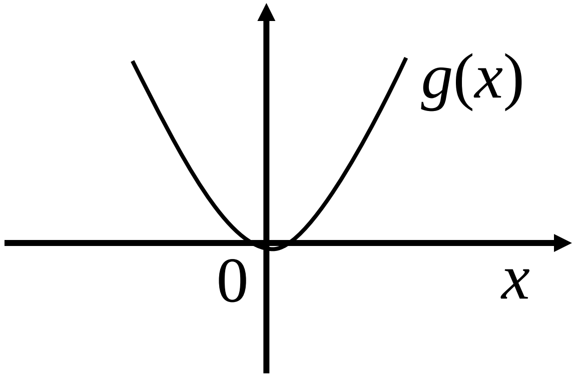
$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right),-\infty<y<\infty$$

即 $$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}}$$

即有 $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$

设随机变量X具有概率密度$f_X(x), -\infty < x < \infty$，又设函数$g(x)$在不相重叠的区间$I_1$，$I_2, \ldots$ 上逐段严格单调，其反函数分别为$h_1(y)$，$h_2(y), \ldots$，且$h'_1(y)$，$h'_2(y), \ldots$均为连续函数，那么Y是连续型随机变量，且密度函数为

$$f_Y(y) = f_X(h_1(y))\,|h_1'(y)| + f_X(h_2(y))\,|h_2'(y)| + \cdots$$



例3. 设X的概率密度为 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$, 求$Y = X^2$ 的概率密度.

解： 当$y \le 0$时, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 0.$

当$y > 0$时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\}$

$$= P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

则 $$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

例5. 设电压$V=A\sin\theta$，其中A是一个已知的正常数，相角Θ是一个随机变量，且有$\Theta\sim U(-\pi/2,\ \pi/2)$，试求电压$V$的概率密度。

解： $v=g(\theta)=A\sin\theta$在$(-\pi/2,\ \pi/2)$上恒有$g'(\theta)=A\cos\theta>0$,

且有反函数 $\theta=h(v)=\arcsin(v/A)$,

$$h'(v)=\frac{1}{\sqrt{A^2-v^2}}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v = g(\theta) = A\sin\theta,\quad h(v) = \arcsin(v/A),\quad h'(v) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}}$$

又Θ 的概率密度为$f(\theta) = \begin{cases} 1/\pi, & -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

由定理得$V = A\sin\Theta$ 的概率密度为$\psi(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - v^2}}, & -A < v < A \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$