

# 2025-2026学年应用统计期中试卷

一、总体 $X$ ，两组随机样本，分别有 $n_1, n_2$ 个，样本均值分别为 $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ ， $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$ ，已知 $T = a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2$ 为 $\mu$ 的无偏估计量

1.  $a, b$ 满足的关系
  2.  $D(T)$ 最小时， $a, b$ 的取值
- 二、 $X \sim U(0, \theta), X_1, \dots, X_n$ 为一组随机样本
3.  $\theta$ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$
  4.  $\theta$ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_2$
  5. 二者是否是无偏估计

三、 $X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ 为一组随机样本，

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, (S^*)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ，求 $\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S^*} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ 的分布

四、 $Y \sim U(0, \theta), Y_1, \dots, Y_n$ 为一组随机样本， $X_i = -\log Y_i, Z_n = (\prod_{i=1}^n Y_i)^{-1/n}$

1. 求 $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ 的近似分布
2. 证明： $\sqrt{n}(Z_n - e) \xrightarrow{d} N(0, e^2)$

五、

1.  $X_1, \dots, X_{15}$ 是取自 $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 的一组样本 $\mu_x, \sigma_x^2$ 未知， $\hat{\mu}_x = \bar{X} = 2.4, \hat{\sigma}_x^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = 0.55$ ，求 $\mu_x, \sigma_x^2$ 的95%置信区间
2.  $Y_1, \dots, Y_{10}$ 是取自 $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ 的一组样本 $\mu_y, \sigma_y^2$ 未知， $\hat{\mu}_y = \bar{Y} = 2.4, \hat{\sigma}_y^2 = \overline{Y^2} - \bar{Y}^2 = 0.55$ ，求 $\mu_y, \sigma_y^2$ 的90%置信区间
3. 如何理解95%置信度